SISTEMI LINEARI

Esercizi

Esercizio 1. Risolvere, se possibile, i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x - y = -1 \\ x - 2y - 2z = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Procediamo con operazioni elementari di riga sulla matrice del primo sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 4R_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il primo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4y + 5z = 0, \end{cases}$$

da cui si ricava $y = -5/4z$ e, di conseguenza, $x = y + z = z - 5/4z = -1/4z$. In particolare l'insieme delle soluzioni del primo sistema è

$$V := \{ (-a, -5a, 4a) \mid a \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((-1, -5, 4)).$$

Procediamo con operazioni elementari di riga sulla matrice completa del secondo sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi il secondo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ z = 1 \\ -y - z = 2, \end{cases}$$

da cui si ricava $z = 1$ e, di conseguenza, $y = -2 - z = -3$, $x = y + z - 2 = z - 4z$. In particolare il secondo sistema ha come unica soluzione $(-4, -3, 1)$.