Esercizio 3. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v_1 := (0,1,-1), \quad v_2 := (2,0,1), \quad v_3 := (1,2,0).$$

(1) Verificare che esiste un unico $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ avente v_1, v_2, v_3 come autovettori associati, rispettivamente, agli autovalori $0, 3, 6$. f è semplice?
(2) Determinare $M(f)$, $\ker(f)$ ed $\mathrm{im}(f)$.

Svolgimento. In sostanza si richiede che

$$f(v_1) = 0, \quad f(v_2) = 3v_2, \quad f(v_3) = 6v_3.$$

Si noti che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti: infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $\mathcal{C} := (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e, quindi, è possibile dimostrare l'esistenza e l'unicità di un tale f.

Per definizione f è semplice perché esiste una base di $\mathbb{R}^3$, precisamente $\mathcal{C} := (v_1, v_2, v_3)$, costituita da autovettori di f. Se

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

allora risulta

$$P^{-1}M(f)P = D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -4/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

segue che

$$M(f) = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -4/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & 8 & 8 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

In particolare $\mathrm{im}(f) = \mathcal{L}((2,-4,2),(2,8,-1))$, da cui $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$, pertanto $\dim(\ker(f)) = 3 - \dim(\mathrm{im}(f)) = 1$: poiché $v_1 \in \ker(f)$ concludiamo che $\ker(f) = \mathcal{L}((0,1,-1))$. Per determinare $\ker(f)$ si può altresì procedere risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$$