FORME INDETERMINATE

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$0(\pm\infty)$$

$$+\infty-\infty$$

$$0^0$$

$$(+\infty)^0$$

$$1^{\pm\infty}$$

ANDREA STANCA MATEMATICA

LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty \quad \forall p \in \mathbb{R},\ a > 1$
- $\lim \frac{(\log x)^p}{x^p} = 0, \quad \forall p \in \mathbb{R},\ r > 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Tg} x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} x^r (\log x) = 0, \quad r > 0$

COMPORTAMENTI ASINTOTICI

$$\underbrace{\operatorname{sen} x \sim \operatorname{tg} x \sim \log(1+x) \sim e^x - 1 \sim \operatorname{arcsen} x \sim \operatorname{arctg} x \sim x}_{\text{per } x \to 0}$$

MENTRE

$a^x - 1 \sim x \log a$ per $x \to 0$

e

$1 - \cos x \sim x^2/2$ per $x \to 0$

anche

$\log_a(1+x) \sim x \log_a e$

MATEMATICA

CAPITOLO 1 FUNZIONI

LE FUNZIONI SONO PARTICOLARI RELAZIONI TRA INSIEMI E PRECISAMENTE UNA FUNZIONE F È UNA LEGGE TRA DUE INSIEMI, A e B TALE CHE AD OGNI ELEMENTO x DEL PRIMO INSIEME A ASSOCIA UNO ED UNO SOLO ELEMENTO DEL SECONDO INSIEME B DETTO F(x).

INSIEME A = · DOMINIO
· CAMPO DI ESISTENZA
· INSIEME DELLA FUNZIONE F

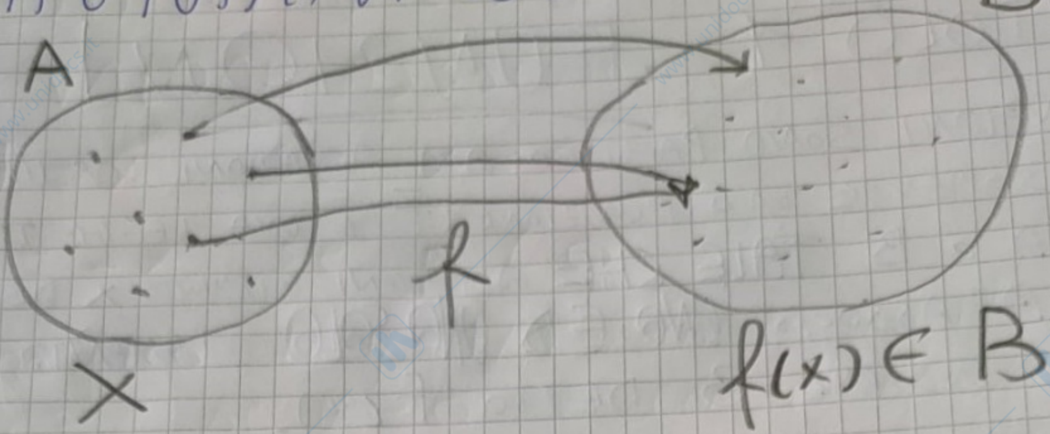
INSIEME B = · CODOMINIO
INSIEME ~~...~~ DEI PUNTI IMMAGINE F(x) PER $x \in A$ È DETTO INSIEME DI IMMAGINE

UTILIZZANDO I DIAGRAMMI DI VENN una funzione si può rappresentare con delle frecce che partano dagli elementi del primo insieme ed arrivano negli elementi del secondo insieme.

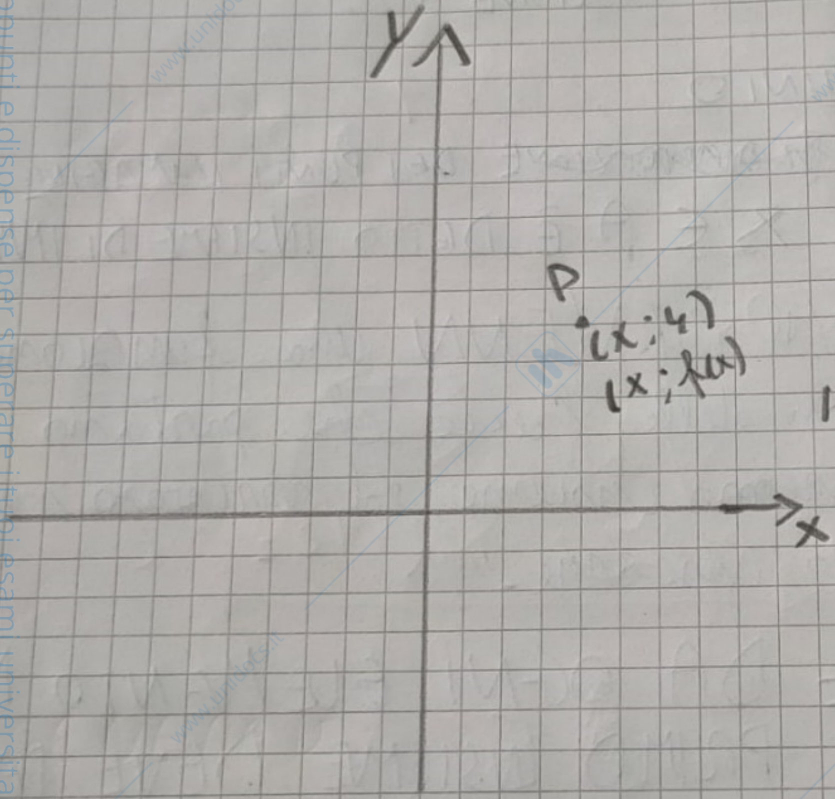
DEF. FUNZIONE = DA OGNI ELEMENTO DEL PRIMO INSIEME DEVE PARTIRE UNA ED UNA SOLA FRECCIA

per riconoscere se un grafico è il grafico di una funzione della variabile x basta INTERSECARLO CON LE RETTE VERTICALI se le intersezioni in qualche punto sono più di una allora NON è ~~...~~ il grafico di una funzione.

DIAGRAMMA DI VENN



PIANO CARTESIANO



A $x \rightarrow$ ASCISSE

B $y \rightarrow$ ORDINATE

$f: A \xrightarrow{f} B$

$x \rightarrow f(x) = y$

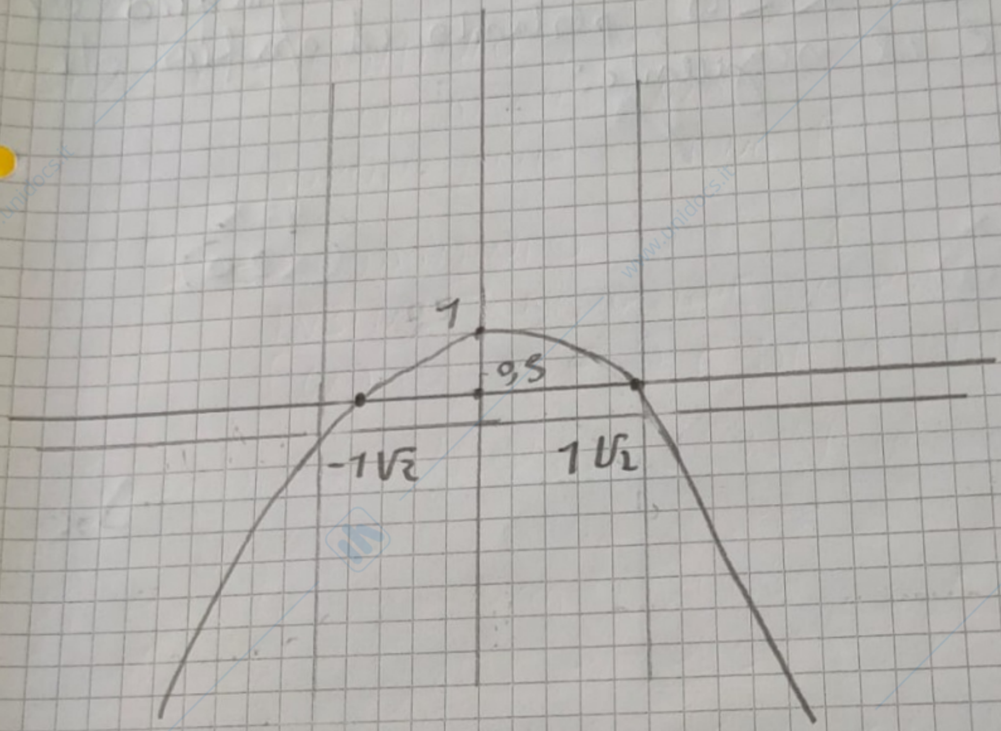
x ↓ INDIPENDENTE

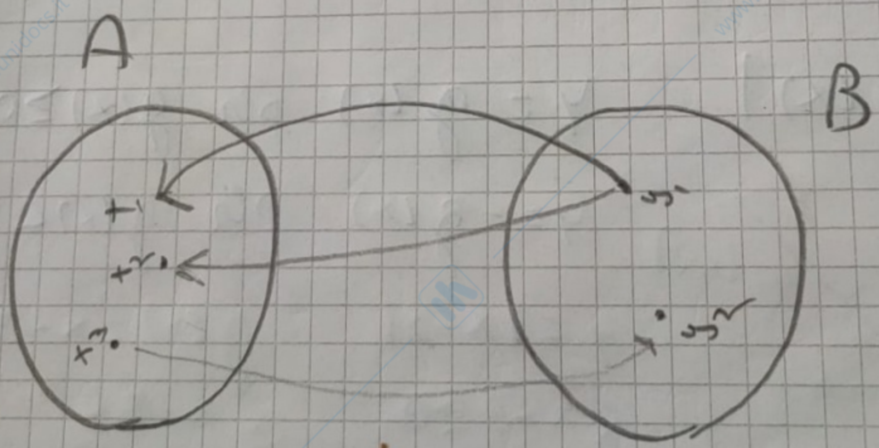
$f(x)$ ↓ IMMAGINE ↓ DIPENDENTE

INDIPENDENTE $\xrightarrow{f}$ DIPENDENTE

ESEMPIO RETROIMMAGINE

SIA $y = -x^2 + 1$ IL DOMINIO È tutta la retta reale $\mathbb{R}$, l'immagine è l'insieme delle y tali che $y \leq 1$ e la RETROIMMAGINE di $y = 0,5$ è l'insieme $\{-1\sqrt{2}, 1\sqrt{2}\}$ cioè l'insieme fatto da due valori di x: $x_1 = -1\sqrt{2}$ $x_2 = 1\sqrt{2}$





RETROIMMAGINE

$y_1 = x_1$ e x_2

$y_2 = x_3$

ATTENZIONE NELLA RETRO IMMAGINE AD UN ELEMENTO $y \in B$ SI POSSONO ASSOCIARE PIÙ ELEMENTI x DELL'INSIEME A

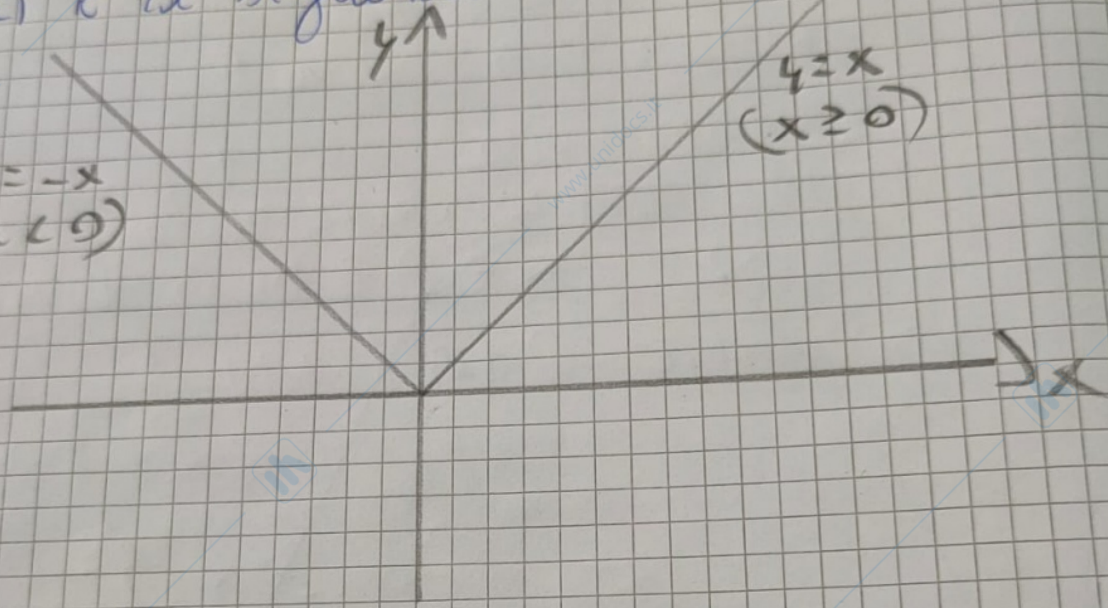
ESEMPIO VALORE ASSOLUTO

DEF VALORE ASSOLUTO:

$|x| = x$ se $x \geq 0$

$|x| = -x$ se $x < 0$

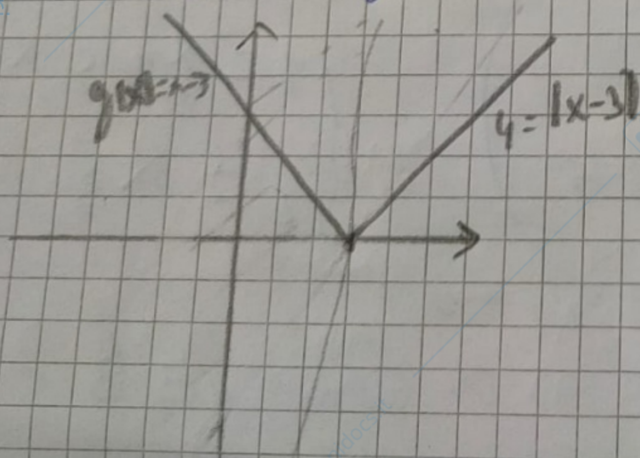
Il grafico di $y = |x|$ coincide con il grafico di $y = x$ se $x \geq 0$ e con il grafico di $y = -x$ se $x < 0$, pertanto il grafico di $y = |x|$ è il seguente:



IN GENERALE:

per $y = |g(x)|$ $\quad y = g(x)$ per $g(x) \geq 0$

$y = -g(x)$ per $g(x) < 0$



$y = |x-3|$ $\quad g(x) = x-3$

$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ y = x-3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x-3 < 0 \\ y = -x+3 \end{cases}$

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI

Definizione di FUNZIONE PARI E DISPARI

Una FUNZIONE si dice PARI se $f(-x) = f(x)$ ovvero se x ed il suo opposto $-x$ hanno la stessa immagine. → SIMMETRIA ASSIALE rispetto all'asse delle y

Una FUNZIONE si dice DISPARI se $f(-x) = -f(x)$ ovvero se $-x$ ed il suo opposto hanno l'immagine opposta → SIMMETRIA CENTRALE rispetto all'origine degli assi

Il QUOZIENTE e il PRODOTTO di FUNZIONE DISPARI è PARI e di FUNZIONE PARI è PARI, cioè vale la regola dei segni. Lo stesso dicasi per la SOMMA di FUNZIONI PARI e di FUNZIONI DISPARI che è DISPARI, mentre nulla si può dire circa la SOMMA DI UNA FUNZIONE PARI E DI UNA DISPARI.

Una funzione f si dice MONOTONA CRESCENTE se per ogni coppia x_1, x_2, appartenente al DOMINIO A di $f(x)$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$

Una funzione f si dice MONOTONA DECRESCENTE se per ogni coppia x_1, x_2, appartenente al DOMINIO A di $f(x)$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$.

~~se le disuguaglianze~~

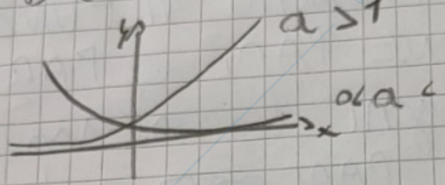
se le disuguaglianze valgono in senso stretto le funzioni si dicono rispettivamente CRESCENTI STRETTE e DECRESCENTI STRETTE

Con il termine MONOTONE si intende INSIEME DELLE FUNZIONI CRESCENTI E DECRESCENTI.

LE FUNZIONI COSTANTI sono quelle che soddisfano tutte e due le definizioni e quindi sono crescenti e decrescenti.

UNA FUNZIONE NON MONOTONA è quando due coppie estratte dal dominio della funzione x_1, x_2 con $x_1 < x_2$ per cui una volta si ha $f(x_1) > f(x_2)$ e l'altra $f(x_1) < f(x_2)$

Le FUNZIONI ESPONENZIALI cioè $y = a^x$ con a numero ~~reale~~ reale positivo diverso da uno sono FUNZIONI MONOTONE STRETTE e precisamente CRESCENTI STRETTE se $a > 1$ e DECRESCENTI se $0 < a < 1$

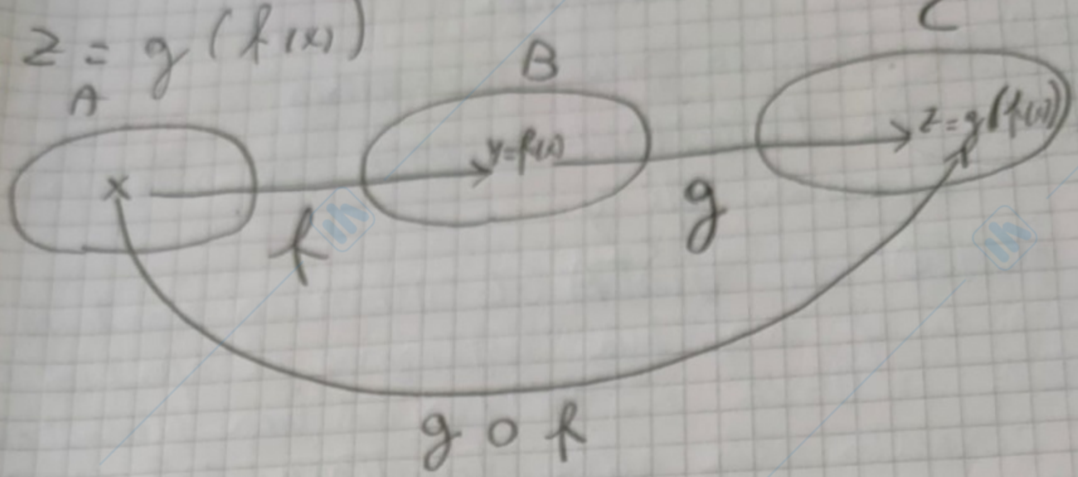


Le FUNZIONE LOGARITMICHE $\log_a x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$ sono FUNZIONI MONOTONE STRETTE nel loro dominio cioè per $x > 0$ e precisamente se la base $a > 1$ CRESCENTI STRETTE invece se $0 < a < 1$ DECRESCENTI STRETTE

UNA FUNZIONE $f(x)$ si dice PERIODICA quando $T > 0$ se $f(x+T) = f(x)$ per ogni x reale e si chiama ~~periodo~~ PERIODO DELLA FUNZIONE il più piccolo tra i T che godono di detta proprietà

Composizione di funzioni

$z = g(f(x))$

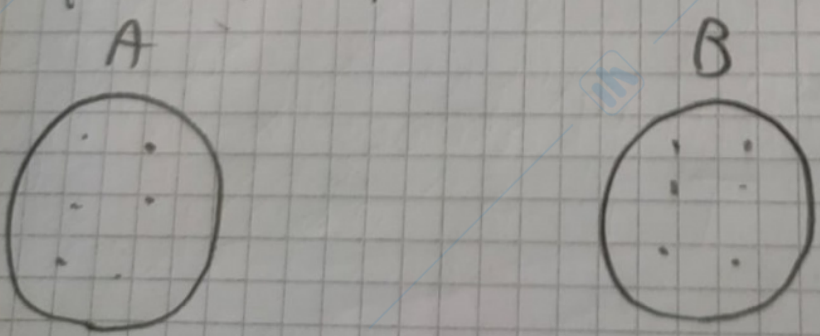


ATTENZIONE LA FUNZIONE COMPOSTA NON GODE DELLA PROPRIETÀ COMMUTATIVA in generale $g \circ f \neq f \circ g$ e quindi è importante l'ORDINE nella composizione

DEFINIZIONE DI FUNZIONE INVERTIBILE

Si definisce FUNZIONE INVERTIBILE se dato $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$ allora e $f^{-1}(f(x)) = x$

$f^{-1}(f(y)) = y$



UNA FUNZIONE INVERTIBILE è tale che ad una x corrisponda una solo y e viceversa

Le FUNZIONI STRETTE SONO INVERTIBILI

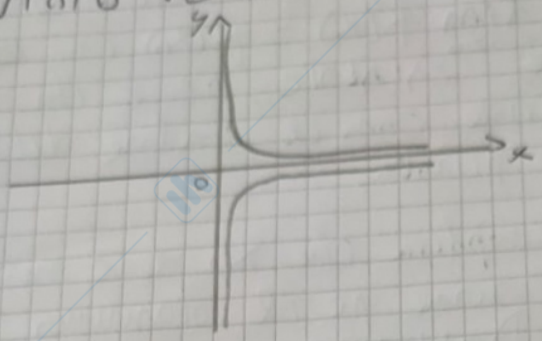
Per trovare la FUNZIONE INVERSA: si esplicita la x in funzione di y

Da un PUNTO di VISTA GEOMETRICO scambiare le x con le y, significa sottoporre il grafico della FUNZIONE INVERSA $x = f^{-1}(y)$ ad una simmetria assiale rispetto alla retta bisettrice del 1° e 3° quadrante cioè alla retta $y = x$.

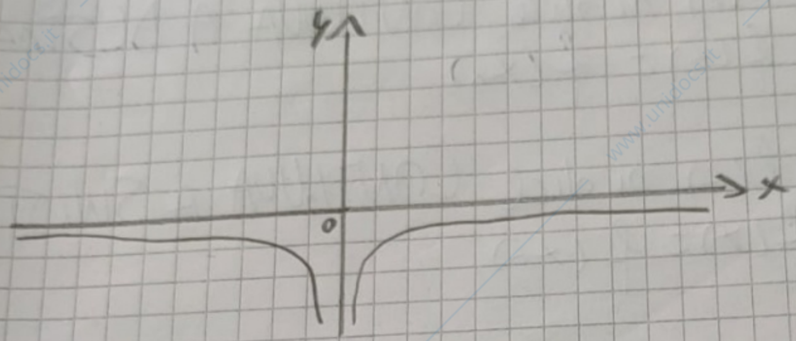
Non tutte le funzione sono INVERTIBILI ad esempio le FUNZIONI PARI per loro stessa definizione non sono invertibili, però opportunamente ristrette ad un sottointervallo dell'insieme di definizione possono diventarlo, (= per le FUNZIONI TRIGONOMETRICHE)

CAPITOLO 2 LIMITI DI FUNZIONI

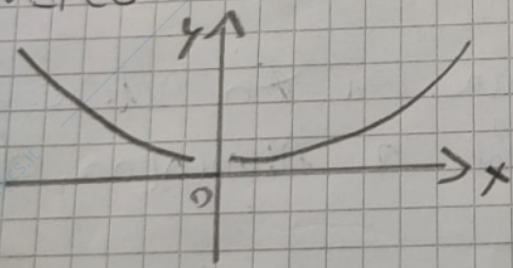
- ASINTOTO VERTICALE $\rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$



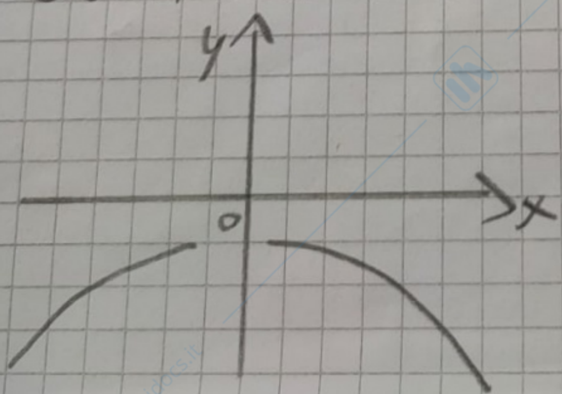
- ASINTOTO ORIZZONTALE $\rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$



- DIVERGENZA POSITIVA $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$



- DIVERGENZA NEGATIVA $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$



FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE: Una funzione $y = f(x)$ si dice continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ cioè se il limite esiste, se è un numero e se coincide con il valore della funzione in quel punto.

Questa definizione implica che x_0 deve non solo essere punto di accumulazione per il dominio, ma deve appartenere al DOMINIO.

Una FUNZIONE $y = f(x)$ si dice CONTINUA A DESTRA in x_0 se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Una FUNZIONE $y = f(x)$ si dice CONTINUA A SINISTRA in x_0 se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Una FUNZIONE si dice CONTINUA IN UN INTERVALLO se è continua in ogni punto dell'intervallo

Se una funzione è continua in x_0 allora è continua sia a destra che a sinistra di x_0

DISCONTINUITÀ:

Ci sono vari tipi di

a) Una discontinuità di 1° SPECIE (salto) se esistono limite destro e sinistro in quel punto e sono numeri diversi.

b) Una DISCONTINUITÀ ELIMINABILE se i limiti destro e sinistro in quel punto coincidono ma sono diversi dal valore della funzione in quel punto.

c) Una DISCONTINUITÀ DI 2° SPECIE se almeno uno dei due limiti destro o sinistro è infinito o non esiste

OPERAZIONI CON I LIMITI NEL CASO DI FUNZIONI ENTRAMBE DIVERGENTI O UNA CONVERGENTE E L'ALTRA DIVERGENTE.

a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{x \to \infty} g(x) = \pm\infty$ $\longrightarrow$

- $f(x) + g(x)$ → $+\infty$ / → $-\infty$ / → $+\infty - \infty$ $\boxed{IND}$

- $f(x) \cdot g(x) = \pm\infty$ (segno dell'infinito è determinato dalla regola dei segni)

- $f(x)/g(x) = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (FORMA IND.)

b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ (CONVERGENTE)

$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ (DIVERGENTE)

→ - $f(x) + g(x) = \infty$ (segno = a quello di g(x))

- $f(x) \cdot g(x) = \infty$ (segue la regola dei segni)

- $f(x) / g(x) = 0$

- $g(x) / f(x) = \infty$ (segue la regola dei segni)

c) $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$ $\qquad \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ $\qquad \dfrac{1}{0} =$ NON ESISTE ($\nexists$)

d) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to \infty} g(x) = \pm\infty$

→ - $f(x) + g(x) = \infty$ (segno = a quello di g(x))

FORME INDETERMINATE	
$\dfrac{0}{0}$	0^0
$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$(+\infty)^0$
$0(\pm\infty)$	$1^{\pm\infty}$
$+\infty - \infty$	

- $f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \pm\infty$ (FORMA INDETERMINATA)

- $g(x) / f(x) = \infty$ (regola dei segni)

- $f(x) / g(x) = 0$

- Se il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore la funzione razionale DIVERGE (regola dei segni)

- Se il grado del numeratore supera di uno il grado del denominatore la funzione razionale DIVERGE ed ammette un asintoto obliquo

- Se il grado del numeratore è minore di quello del denominatore la funzione razionale converge a zero e la funzione ammette come ASINTOTO ORIZZONTALE l'asse delle X

INFINITESIMI ED INFINITI

Una funzione si dice un INFINITESIMO per $x \to x_0$ oppure $x \to \pm\infty$, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ oppure se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

INFINITESIMO : $\lim_{x \to 0, \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

SIMULTANEI : $y = f(x)$ e $y = g(x)$ convergono a zero per le stesse x

INFINITESIMI CAMPIONE:

$y = x - x_0$ per $x \to x_0$

$y = x$ per $x \to 0$

$y = 1/x$ $x \to \pm\infty$

STESSO ORDINE: $\lim_{x \to 0, \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = m \neq 0$

per indicare che i 2 INFINITESIMI sono dello stesso ordine si scrive che:

$$f(x) \sim m \cdot g(x) \text{ per } x \to 0, \ x \to \pm\infty$$

COMPORTAMENTI ASINTOTICI:

$\operatorname{sen} x \sim \operatorname{tg} x \sim \log(1+x) \sim e^x - 1 \sim \operatorname{arcsen} x \sim \operatorname{arctg} x \sim x$ per $x \to 0$

$a^x - 1 \sim x \log a$ per $x \to 0$ e $1 - \cos x \sim x^2/2$ per $x \to 0$

e $\log_a(1+x) \sim x \log_a e$

ORDINE SUPERIORE: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \pm\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

ORDINE INFERIORE: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \pm\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

ORDINE DI UN INFINITESIMO: La potenza a cui va innalzato l'infinitesimo campione perché i due siano equivalenti ovvero dello stesso ordine

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE: ci dice che nel calcolo di una forma indeterminata si possono trascurare gli infinitesimi di ordine superiore

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \pm\infty}} \frac{f(x) - F(x)}{g(x) - G(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ \pm\infty}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

INFINITO $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \pm\infty}} f(x) = \pm\infty$

SIMULTANEI $y = f(x)$ e $y = g(x)$ due infiniti, se divergono per le stesse x

INFINITI CAMPIONI

$y = 1/(x - x_0)$ per $x \to x_0^+$

$y = 1/(x - x_0)$ per $x \to x_0^-$

$y = x$ per $x \to \pm\infty$

$y = 1/x$ $x \to 0^+$

$y = 1/x$ $x \to 0^-$

STESSO ORDINE: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \pm\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = m \neq 0$

$f(x) \sim m g(x)$ per $x \to x_0$
per $x \to \pm\infty$

ORDINE SUPERIORE: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \pm\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

ORDINE INFERIORE: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \pm\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

ORDINE DI UN INFINITO la potenza a cui va innalzato l'infinito campione perché i due siano equivalenti ovvero dello stesso ordine.

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE DEGLI INFINITI: ci dice che nel calcolo di una forma indet. si possono trascurare gli infinitesimi di ordine inferiore.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \pm\infty}} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ \pm\infty}} \frac{F(x)}{G(x)}$$

CAPITOLO 3 TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

Dato un insieme A si dice ILLIMITATO SUPERIORMENTE/INFERIORMENTE se va a $\pm\infty$

Dato un insieme A si dice LIMITATO SUPERIORMENTE/INFERIORMENTE se esiste $b \geq a$ allora si dice superiormente se invece $b \leq a$ allora si dice inferiormente

Dato un insieme A si dice ESTREMO SUP./INF. il valore minimo di b che non appartiene ad A

Dato un insieme A si dice MASSIMO O MINIMO se l'estremo superiore o inferiore appartengono all'insieme A

TEOREMA DI WEIERSTRASS

"Sia $f(x)$ continua in un intervallo limitato e chiuso $[a;b]$, allora $f(x)$ ammette massimo M e minimo m assoluti, cioè esistono x_1 e $x_2 \in [a,b]$ tali che $f(x_1) = M$ $f(x_2) = m$ e $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$"

Teorema di ESISTENZA degli ZERI

"Sia ~~f~~ una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso assume 2 valori, uno negativo e l'altro positivo, allora assume anche il valore 0 che è un valore intermedio al valore negativo col al valore positivo.

Come dice l'enunciato il TEOREMA di ESISTENZA degli ZERI è un teorema di ESISTENZA e non di unicità. Per avere un teorema di esistenza e unicità occorre fare delle ipotesi ulteriori sulla funzione. Per esempio se aggiungiamo l'ipotesi di monotonia stretta per la funzione il teorema diventa un teorema di esistenza e unicità.

Le ascisse dei punti di intersezione sono le soluzioni dell'equazione di partenza

ESEMPIO: $e^x - 2 + x = 0$

TEOREMA dei VALORI INTERMEDI

"Sia $y = f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e sia K un numero compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ allora esiste almeno un $c \in (a; b)$ tale che $f(c) = k$ cioè K è immagine tramite f di qualche $c \in (a; b)$ ovvero il grafico della funzione interseca la retta $y = k$ in qualche punto"

Il teorema dei VALORI INTERMEDI si riconduce al teorema di esistenza degli zeri per traslazione (basta traslare $f(x)$ di $-K$)

Poiché per il TEOREMA DI WEIERSTRASS una funzione continua in $[a, b]$ ammette massimo M e minimo m, il teorema dei valori intermedi ci dice che l'immagine di una funzione continua in $[a, b]$ è tutto l'intervallo limitato e chiuso in intervalli limitati e chiusi

$$[a; b] \to [m, M]$$

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI ammette una GENERALIZZAZIONE nel caso di FUNZIONI CONTINUE su INTERVALLI ILLIMITATI:

"Sia $f(x)$ continua in R e sia $\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to -\infty} f(x) < 0$ oppure $-\infty$, allora esiste almeno uno zero per $f(x)$"

Come conseguenza si ha che ogni polinomio di grado DISPARI ha ALMENO UNO ZERO

Nel caso di un POLINOMIO di grado PARI i 2 limiti sopra calcolati sono uguali in segno e quindi non possiamo applicare il teorema.

CAPITOLO 4 DEFINIZIONE DI DERIVATA

- Le origini del concetto di derivata sono di natura GEOMETRICA tracciamento di una retta tangente ad una curva e FISICA determinazione della velocità istantanea di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme.

Velocità media = $V_m = \dfrac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$

- Velocità istantanea = $V_i \quad \lim\limits_{t_2 \to t_1} \dfrac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$

Problema di tracciare la RETTA TANGENTE

1° caso: in una conica abbiamo una intersezione tra il sistema di secondo grado tra l'equazione della conica e l'equazione di primo grado della retta abbiamo una sola soluzione imponendo che il $\Delta = 0$ nell'equazione di 2° grado

2° caso: in una cubica o in una maggiore. In cui si utilizza la formula

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

(I) $\to$ = m $\to$ $y - y_0 = m(x - x_0)$, $m = f'(x_0)$

(II) $\to$ $\nexists$ $\to$ (I) $\exists$ lim DX e SN $= m_1, m_2$ $\to$ TAN DX e SN $\to$ PUNTO ANGOLOSO

(II) $\exists$ lim DX e SN $= \pm\infty$ $\to$ CUSPIDE

(III) $\to$ $\pm\infty$ $\to$ TAN VERTICALE

TEOREMA

"Sia $y = f(x)$ derivabile in $[a, b]$ allora $f(x)$ è continua in $[a, b]$

Una funzione si dice DERIVABILE in un intervallo I se è derivabile in ogni punto dell'intervallo I e la funzione che si ottiene associando ad ogni $x \in I$ la derivata in x si chiama la FUNZIONE DERIVATA

PROPRIETÀ DELLE DERIVATE

- SOMMA

$$D(f(x) + g(x)) = D f(x) + D g(x)$$

- PRODOTTO con elemento costante

$$D c f(x) = c D f(x)$$

- PRODOTTO

$$D(f(x) g(x)) = (D f(x)) g(x) + f(x) D g(x)$$

- DERIVATA di una FUNZIONE INVERSA

$$D 1/f(x) = -D f(x) / f^2(x)$$

- QUOZIENTE

$$\frac{(D f(x)) g(x) - f(x) D g(x)}{g^2(x)}$$

- Derivata della FUNZIONE COMPOSTA

$$D f(g(x)) = f'(g(x)) D g(x)$$

- Derivata della FUNZIONE INVERSA

$$D g(y) = 1 / f'(g(y))$$

DIFFERENZIALE:

data $y = f(x)$ derivabile in x_0 si chiama DIFFERENZIALE di $f(x)$ in x_0 il prodotto della derivata di $f(x)$ in x_0 per l'incremento $(x - x_0)$ ovvero

$$df = f'(x_0)\underbrace{(x - x_0)}_{\downarrow}$$

$$df = f'(x_0)\, dx$$

$$\frac{df}{dx} = f'(x_0)$$

DEFINIZIONE DI MASSIMO E MINIMO RELATIVO

Un punto x_0 interno al dominio A di $y = f(x)$ si dice di MASSIMO RELATIVO per $f(x)$ se esiste un intorno I di x_0, $I \subseteq A$ tale che per ogni $x \in I$ si ha $f(x) \geq f(x_0)$

" " " " " " " " " " "

" " " MINIMO RELATIVO per $f(x)$ se esiste un intorno I di x_0, $I \subseteq A$ tale che per ogni $x \in I$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$

TEOREMA DI FERMAT

"Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile in x_0 e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo allora $f'(x_0) = 0$"

Cioè se la funzione è derivabile nei punti di massimo e di minimo relativo allora in questi punti la retta ~~al~~ tangente al grafico della funzione è ORIZZONTALE

PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO ANGOLOSI

1° caso Quando esistono punti max o min relativi in cui NON ESISTE retta TANGENTE

2° caso: Esistono punti in cui la retta tangente è ORIZZONTALE e non sono