

Esami scritti di Analisi Matematica I 2016 - 2017

1	Esame del 1 febbraio 2017 - I° turno	2
2	Esame del 1 febbraio 2017 - II° turno	6
3	Esame del 14 febbraio 2017 - I° turno	10
4	Esame del 14 febbraio 2017 - II° turno	13
5	Esame del 3 luglio 2017	18
6	Esame del 19 settembre 2017	22

1 Esame del 1 febbraio 2017 - I° turno

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x) = 1 - \left| \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right|.$$

- Determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio, e gli eventuali asintoti.
- Calcolare la derivata di f . Studiare la monotonia e tracciare un grafico qualitativo di f .
- Si consideri ora la funzione composta $g(x) = e^{f(x)}$. Sfruttando le informazioni già ottenute per f , determinare il dominio di g e i suoi limiti agli estremi del dominio. Verificare che g ammette un prolungamento per continuità, che indicheremo con $h(x)$.
- Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo di h .
- Tracciare un grafico qualitativo di h , e determinarne gli estremi inferiore e superiore.

Esercizio 2.

- Si scriva la definizione della relazione $f(x) = o(2x^2 - 1)$ per $x \rightarrow +\infty$, e la si illustri con un esempio.
- Stabilire se, nell'ipotesi $f(x) = o(2x^2 - 1)$ per $x \rightarrow +\infty$, segue

$$e^{f(x)} = o(e^{2x^2-1}) \quad \text{per} \quad x \rightarrow +\infty.$$

In caso affermativo, lo si dimostri, in caso negativo si dia un contreesempio.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) La funzione è definita se $x^2 - 5x + 6 \neq 0$ e quindi

$$\text{dom}f = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty).$$

Si ha: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ mentre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Dunque

- 1) le due rette $x = 2$ ed $x = 3$ sono asintoti verticali per f ;
- 2) la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale bilatero per f ;
- 3) essendoci un asintoto orizzontale bilatero, non esistono asintoti obliqui.

Si può notare che $f(x) < 1$ per ogni x del dominio.

b) Conviene notare che

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2 - 5x + 6} & \text{se } x < 2 \text{ e } x > 3 \\ 1 + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$

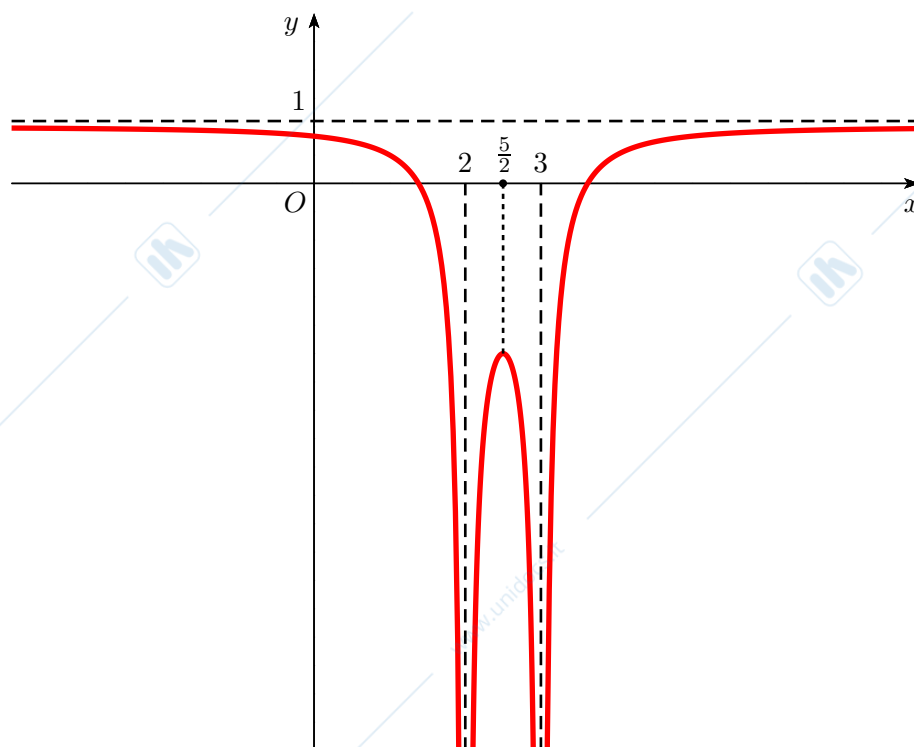
e quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2} & \text{se } x < 2 \text{ e } x > 3 \\ -\frac{2x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2} & \text{se } 2 < x < 3. \end{cases}$$

Notiamo che $2x - 5$ ha segno costante per $x < 2$ ed $x > 3$ mentre cambia segno nell'intervallo $(2, 3)$. Considerando i segni si trova:

- la funzione decresce in $(-\infty, 2)$ e in $[5/2, 3)$;
- la funzione cresce in $(2, 5/2]$ e in $(3, +\infty)$. Il punto $x_0 = 5/2$ è punto di massimo locale.

Il grafico è nella figura seguente.



- c) 1) La funzione g ha lo stesso dominio di f perché l'esponenziale è ovunque definito.
 2) Dal teorema delle funzioni composte si ha:
- la funzione g è continua, perché composizione di funzioni continue e $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \text{dom } g$;
 - la retta $y = e$ è asintoto orizzontale bilatero, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e.$$

- g tende a zero quando f tende a $-\infty$ e quindi per $x \rightarrow 2$ e per $x \rightarrow 3$.
- Dunque, in ambedue questi valori di x la funzione g ammette estensione continua h ottenuta ponendo

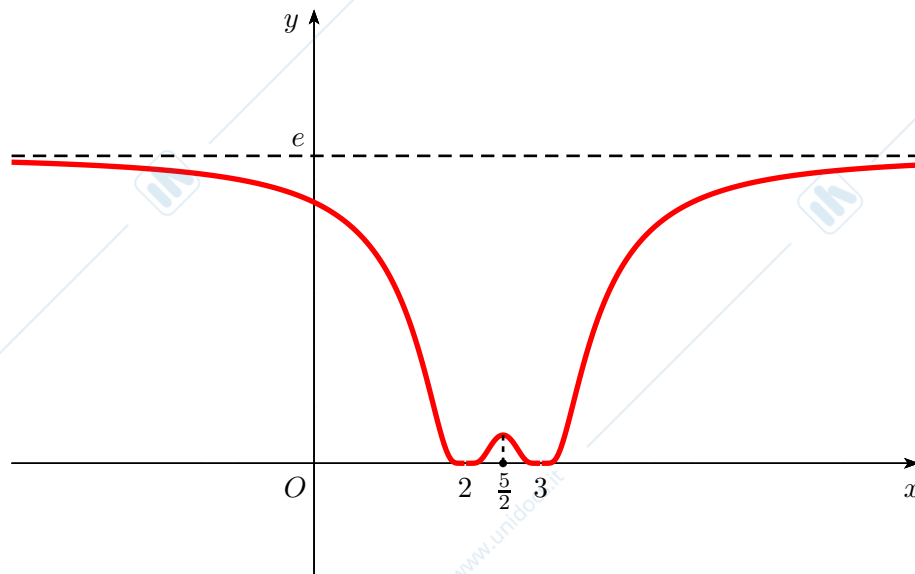
$$h(x) = \begin{cases} e^{f(x)} & \text{se } x \neq 2 \text{ e } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = 2 \text{ e } x = 3. \end{cases}$$

La funzione così estesa è continua su \mathbb{R} .

- d) La funzione e^y è crescente e quindi la funzione h è crescente, oppure decrescente, negli stessi intervalli in cui è crescente o decrescente la funzione f . In particolare, il punto $5/2$ è punto di massimo relativo per h . Inoltre $h(x) = 0$ se $x = 2$ ed $x = 3$ mentre $h(x) > 0$ su $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$. Dunque i punti 2 e 3 sono punti di minimo assoluto per h .
- e) L'estremo inferiore di h è 0 (ed è anche minimo); l'estremo superiore è e . Non esiste massimo. L'esercizio non chiede di studiare la derivabilità di h in $x = 2$ e in $x = 3$. Per completezza, osserviamo che $h'(x) = f'(x)e^{f(x)}$ per ogni $x \neq 2, 3$ e

$$\lim_{x \rightarrow 2} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 3} h'(x) = 0.$$

Il grafico è nella figura seguente.



Esercizio 2.

a) Diciamo che $f(x) = o(2x^2 - 1)$ per $x \rightarrow +\infty$ se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x^2 - 1} = 0$.

Come esempi si possono considerare:

Esempio 1: $f(x) = x$.

In questo caso sia la funzione $f(x) = x$ che la funzione $g(x) = 2x^2 - 1$ sono infiniti per $x \rightarrow +\infty$ e vale $f(x) = o(2x^2 - 1)$.

Esempio 2: $f(x) = 1$.

In questo caso $g(x) = 2x^2 - 1$ è un infinito per $x \rightarrow +\infty$, mentre f non lo è e vale $f(x) = o(2x^2 - 1)$.

Esempio 3: $f(x) = \sin x$.

In questo caso $g(x) = 2x^2 - 1$ è un infinito per $x \rightarrow +\infty$, mentre f non ha limite per $x \rightarrow +\infty$, ma è limitata, e vale $f(x) = o(2x^2 - 1)$.

b) Poniamo $g(x) = 2x^2 - 1$. L'esercizio chiede se è vero che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)-g(x)} = 0.$$

Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right] = -\infty.$$

Ne segue che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = 0$$

e quindi $e^{f(x)} = o(e^{g(x)})$ per $x \rightarrow +\infty$.

2 Esame del 1 febbraio 2017 - II^o turno

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi(x-4)}{x+8+|4-x|}.$$

- Determinarne il dominio, i limiti agli estremi, e gli eventuali asintoti.
 - Calcolarne la derivata, determinando eventuali punti di non derivabilità.
 - Studiarne la monotonia e tracciarne un grafico qualitativo.
 - Si consideri ora la funzione composta $h(x) = \sin(f(x))$. Sfruttando le informazioni già ottenute per f , determinare dominio e immagine della funzione h .
 - Specificare se h ammette valore massimo e valore minimo assoluti.
-

Esercizio 2.

- Enunciare il Teorema di Lagrange, e dare poi un esempio di funzione che *NON* soddisfa la tesi del teorema.
 - Dimostrare che se f è derivabile e $f'(x) < -3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
-

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

- a) Il denominatore è sempre diverso da 0 e quindi i valori della funzione possono essere calcolati per ogni x reale: $\text{dom} f = \mathbb{R}$.

La funzione è continua e quindi non ha asintoti verticali.

Conviene notare che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi(x-4)}{x+8+(4-x)} = \frac{\pi}{12}(x-4) = f_1(x) & \text{se } x \leq 4, \\ \frac{\pi(x-4)}{x+8-(4-x)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-4}{x+2} = f_2(x) & \text{se } x > 4. \end{cases}$$

Dunque, se $x \leq 4$ il grafico di f è la retta $y = \frac{\pi}{12}(x-4)$, da cui $f_1(4) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$.

La funzione f_1 coincide con il suo asintoto obliquo sinistro.

La funzione $f_2(x)$ è l'iperbole equilatera $y = \frac{\pi x - 4}{2x + 2}$, quindi $\lim_{x \rightarrow 4^+} f_2(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \frac{\pi}{2}$. La funzione ammette la retta $y = \frac{\pi}{2}$ come asintoto orizzontale destro.

- b) La funzione è derivabile in ogni $x \neq 4$, perché quoziente di funzioni derivabili, con

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{12} & \text{se } x < 4, \\ \frac{3\pi}{(x+2)^2} & \text{se } x > 4. \end{cases}$$

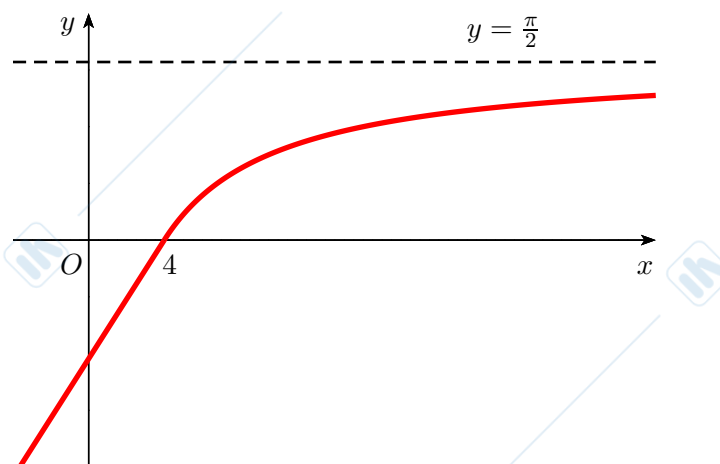
Resta da studiare la derivabilità in $x = 4$. Ricordando che la funzione f è continua, si può usare il *Teorema del tappabuchi* (corollario del Teorema di De L'Hôpital), e calcolare i limiti laterali di f' per $x \rightarrow 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = \frac{\pi}{12}, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) = \frac{3\pi}{6^2} = \frac{\pi}{12}.$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 4} f'(x) = \frac{\pi}{12}$ e f è derivabile anche in $x = 4$ con $f'(4) = \frac{\pi}{12}$. Pertanto f è derivabile su \mathbb{R} .

- c) Poiché $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, deduciamo che f è strettamente crescente in \mathbb{R} .

Osserviamo che, poiché f è derivabile in $x = 4$, la retta $y = f_1(x)$ è tangente al grafico dell'iperbole $y = f_2(x)$ nel punto $x = 4$ in cui si congiungono i due grafici.



- d) La funzione h è composta di $y = \sin t$ e di $t = f(x)$, funzioni ambedue definite su \mathbb{R} . Dunque, $\text{dom } h = \mathbb{R}$. L'immagine di f è $\text{Im } f = f(\mathbb{R}) = (-\infty, \frac{\pi}{2})$. Dunque $h(\mathbb{R}) = \sin(f(\mathbb{R})) = \sin((-\infty, \frac{\pi}{2})) = [-1, 1]$. Quindi $\text{Im } h = [-1, 1]$.
- e) Da $\text{Im } h = [-1, 1]$, deduciamo che $\min_{x \in \mathbb{R}} h(x) = -1$ e che $\max_{x \in \mathbb{R}} h(x) = 1$ e quindi h ammette massimo e minimo assoluti.

Esercizio 2.

a) **Teorema (di Lagrange o del valor medio).** Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che:

- f sia continua in $[a, b]$;
- f sia derivabile in (a, b) .

Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Un esempio di funzione che NON soddisfa la TESI del teorema di Lagrange è una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in (a, b) : f'(x) \neq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Esempio 1: $f(x) = |x|$ su $[-1, 1]$.

In questo caso f è continua in $[-1, 1]$, è derivabile in ogni $x \in (-1, 1)$ con $x \neq 0$ e non è derivabile in $x = 0$, e risulta che

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 0,$$

mentre $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$.

$$\text{Esempio 2: } f(x) = \begin{cases} 1 & x = 2 \\ 0 & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

In questo caso f non è continua in $x = 2$, è derivabile in $(2, 3)$ e

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = -1,$$

mentre $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (2, 3)$.

b) Poiché f è derivabile su \mathbb{R} , applichiamo il Teorema di Lagrange ad f ristretta ad un qualunque intervallo $[0, x]$, con $x > 0$. Ne segue che esiste $c(x) \in (0, x)$ tale che

$$\forall x > 0 : \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c(x)) < -3.$$

Dunque $f(x) < f(0) - 3x$. Per il Teorema del confronto sui limiti, poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(0) - 3x) = -\infty$, anche $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3 Esame del 14 febbraio 2017 - I° turno

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{3x^2 - x^3}.$$

- Determinarne il dominio, gli zeri, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.
- Individuare eventuali punti di non derivabilità, e studiare in tali punti l'esistenza delle derivate destre e sinistre.
- Determinare la derivata, gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo di f , specificando se sono relativi o assoluti.
- Tracciare un grafico qualitativo di f .
- Verificare che la restrizione di f all'intervallo $[0, 2]$ è invertibile e, sapendo che $f(1) = \sqrt{2}$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa nel punto di ascissa $\sqrt{2}$.

Esercizio 2.

- Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y = 2x.$$

- Sia y una funzione che risolve, in un intorno di $x_0 = 1$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3e^{xy} \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Senza calcolare esplicitamente tale soluzione, determinare l'equazione della retta tangente al grafico di y nel punto di coordinate $(1, 2)$.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) L'argomento della radice è non negativo per $x \leq 3$, da cui $\text{dom } f = (-\infty, 3]$.

Inoltre, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{dom } f$ e $f(x) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = 3$.

I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = 0.$$

Si noti che, essendo $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, la funzione non ammette asintoto obliquo sinistro. Inoltre, la funzione è continua perché composizione di funzioni continue, quindi non ammette asintoti verticali.

b) Si ha

$$f'(x) = \frac{3x(2-x)}{2\sqrt{3x^2-x^3}} = \frac{3x(2-x)}{2|x|\sqrt{3-x}} \quad \forall x \in \text{dom } f, \quad x \neq 0, 3.$$

Osservando che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -3/\sqrt{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 3/\sqrt{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -\infty,$$

si conclude che $x = 0$ è l'unico punto di non derivabilità di f .

Il punto $x = 3$ non è un punto interno al dominio di f e quindi non ha senso chiedersi se esiste la derivata di f in questo punto. Poiché f è continua in $(-\infty, 3]$, ha però senso chiedersi se esiste la derivata sinistra di f in $x = 3$. Essendo

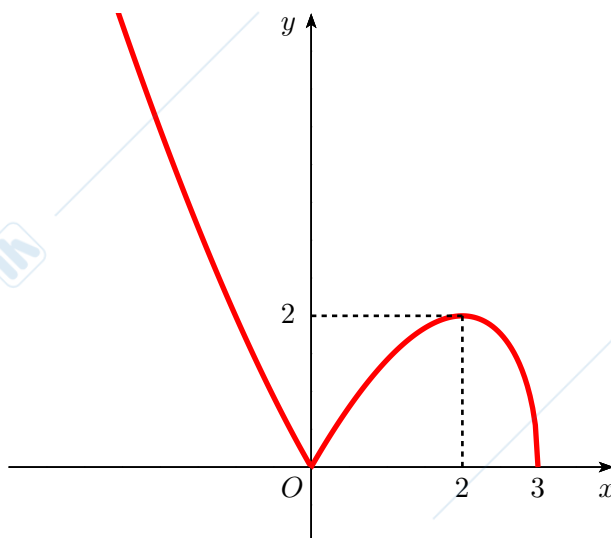
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -\infty,$$

per il *Teorema del tappabuchi* f non ha derivata sinistra in $x = 3$.

c) Si ha $f'(x) > 0 \iff x(2-x) > 0 \iff 0 < x < 2$.

Da cui, f è decrescente strettamente in $(-\infty, 0]$ e in $[2, 3]$, crescente strettamente in $[0, 2]$. In particolare, $x = 2$ è un punto di massimo relativo mentre $x = 0$ e $x = 3$ sono punti di minimo relativo. Infine, dai punti precedenti la funzione è inferiormente limitata con $\inf f = 0$ e superiormente illimitata, ne concludiamo che f non ammette punti di massimo assoluto mentre $x = 0$ e $x = 3$ sono punti di minimo assoluto.

d) Un grafico qualitativo di f è



- e) Per quanto detto sopra f è crescente strettamente in $[0, 2]$ e dunque invertibile in tale intervallo. La retta tangente alla funzione inversa nel suo punto di ascissa $\sqrt{2}$ ha equazione

$$y(x) = f^{-1}(\sqrt{2}) + (f^{-1})'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

Poiché $f(x) = \sqrt{2}$ per $x \in [0, 2]$ se e solo se $x = 1$, si ha che $f^{-1}(\sqrt{2}) = 1$ e di conseguenza

$$y = 1 + \frac{1}{f'(1)}(x - \sqrt{2}) \implies y = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}(x - \sqrt{2}).$$

Esercizio 2.

- a) L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4 = 0$ ha soluzioni immaginarie pure $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y'' + 4y = 0$ è

$$y_0(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La forzante dell'equazione completa è del tipo $f(x) = e^{0x}p_1(x)$, con $p_1(x) = 2x$ (polinomio di grado 1). Siccome $\lambda = 0$ non è radice dell'equazione caratteristica, una soluzione particolare dell'equazione completa è della forma $y_p(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ (generico polinomio di grado 1).

Imponendo che y_p sia soluzione dell'equazione, si ha $y_p'(x) = a$, $y_p''(x) = 0$ e $4(ax + b) = 2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che $a = 1/2$ e $b = 0$. In definitiva, l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{2}x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- b) L'equazione della retta tangente è $y = y(1) + y'(1)(x - 1)$. Dal problema di Cauchy, sfruttando il dato iniziale, si ricava che $y'(1) = 3e^{1-y(1)} = 3e^2$. Quindi l'equazione della retta richiesta è

$$y = 2 + 3e^2(x - 1).$$

4 Esame del 14 febbraio 2017 - II° turno

Esercizio 1. Si consideri la funzione:

$$f(x) = e^{2x} \cdot |x - 1|^{1/3}.$$

- Determinarne il dominio, gli zeri e i limiti agli estremi del dominio.
- Individuare eventuali punti di non derivabilità, e studiare in tali punti l'esistenza delle derivate destre e sinistre.
- Determinare la derivata, gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo di f , specificando se sono relativi o assoluti.
- Tracciare un grafico qualitativo di f .
- Verificare che esiste un intorno di $x = 0$ in cui f è invertibile e, sapendo che $f(0) = 1$, determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa, nel punto di ascissa 1.

Esercizio 2.

- Determinare e rappresentare graficamente tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z - i)^3 + 27 = 0.$$

- Rappresentare graficamente, nel piano complesso, gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2, 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3} \right\}, \quad B = \{z^2 : z \in A\}.$$

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) La funzione è prodotto di funzioni elementari definite su tutto \mathbb{R} da cui $\text{dom } f = \mathbb{R}$.

Inoltre, $f(x) = 0 \iff x = 1$. I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Poiché f è un infinito di ordine superiore a x per $x \rightarrow +\infty$, f non ammette asintoto obliquo destro.

b) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}(x-1)^{1/3} & \text{se } x \geq 1 \\ e^{2x}(1-x)^{1/3} & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Quindi f è derivabile in tutti i punti $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, in quanto composizione di funzioni derivabili.

Pertanto, l'unico punto dove f potrebbe non essere derivabile è $x = 1$. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{2x}(x-1)^{1/3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{2x}}{(x-1)^{2/3}} = +\infty$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{2x}(1-x)^{1/3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-e^{2x}}{(1-x)^{2/3}} = -\infty.$$

Dunque $x = 1$ è un punto di non derivabilità e più precisamente è un punto di cuspidè.

c) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}}{3(x-1)^{2/3}}(6x-5) & \text{se } x \in (1, +\infty) \\ \frac{e^{2x}}{3(1-x)^{2/3}}(5-6x) & \text{se } x \in (-\infty, 1). \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x = 1$, un altro modo per verificare se $x = 1$ è un punto di non derivabilità, è quello di ricorrere al *Teorema del tappabuchi*, calcolando

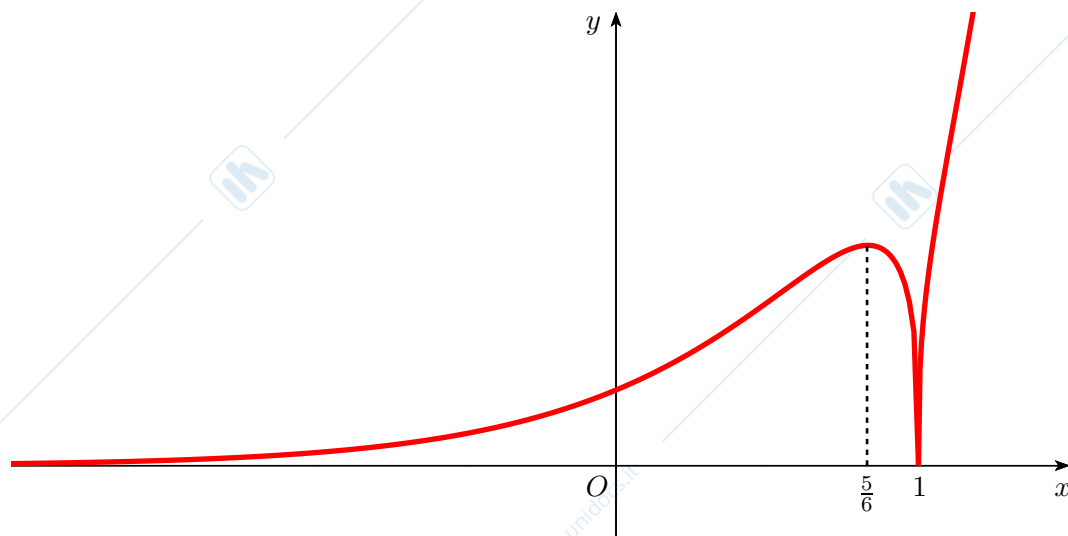
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty.$$

Si ha che

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 5/6) \cup (1, +\infty).$$

Dunque f è crescente strettamente in $(-\infty, 5/6]$ e in $[1, +\infty)$, mentre f è decrescente strettamente in $[5/6, 1]$. In particolare, $x = 5/6$ è un punto di massimo relativo mentre $x = 1$ è un punto di minimo relativo. Infine, poiché $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta che la funzione f è inferiormente limitata con $\inf_{x \in \mathbb{R}} f = 0$; poiché $f(1) = 0$, $x = 1$ è punto di minimo assoluto. Inoltre, sappiamo dal punto a) che è superiormente illimitata; concludiamo allora che f non ammette punti di massimo assoluto.

d) Un grafico qualitativo di f è



e) Per quanto detto sopra, f è crescente strettamente in $(-\infty, 5/6]$ e dunque invertibile in tale intervallo. Poiché $x = 0$ è interno a tale intervallo, esistono intorno di $x = 0$ in cui f è invertibile (ad esempio, l'intervallo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$). La retta tangente alla funzione inversa nel suo punto di ascissa 1 ha equazione

$$y(x) = f^{-1}(1) + (f^{-1})'(1)(x - 1).$$

Poiché $f^{-1}(1) = 0$ e $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{3}{5}$, la retta tangente ha equazione $y = \frac{3}{5}(x - 1)$.

Esercizio 2.

a) Posto $w = z - i$ si ha che

$$(z - i)^3 + 27 = 0 \iff (z - i)^3 = -27 \iff w^3 = -27.$$

Le radici cubiche di $-27 = 27 \cdot e^{i\pi}$ sono date da

$$w_k = \sqrt[3]{27} \cdot e^{i(\pi/3 + 2k\pi/3)} = 3 \cdot e^{i(\pi/3 + 2k\pi/3)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

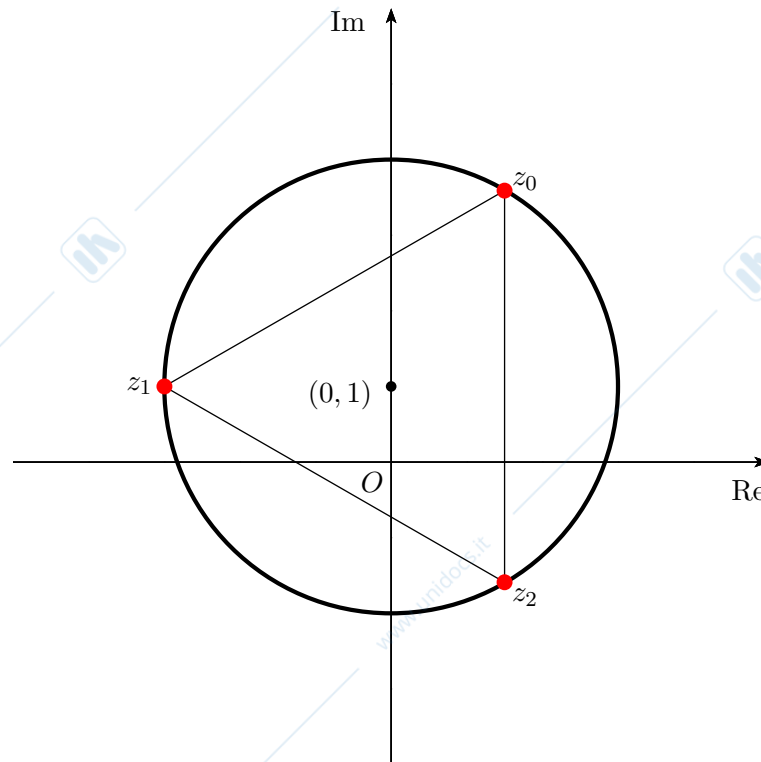
Dunque sono

$$w_0 = 3e^{i\pi/3} = \frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad w_1 = 3e^{i\pi} = -3, \quad w_2 = 3e^{i5\pi/3} = \frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione $(z - i)^3 + 27 = 0$ sono i tre numeri $z_k = w_k + i$, con $k = 0, 1, 2$, cioè

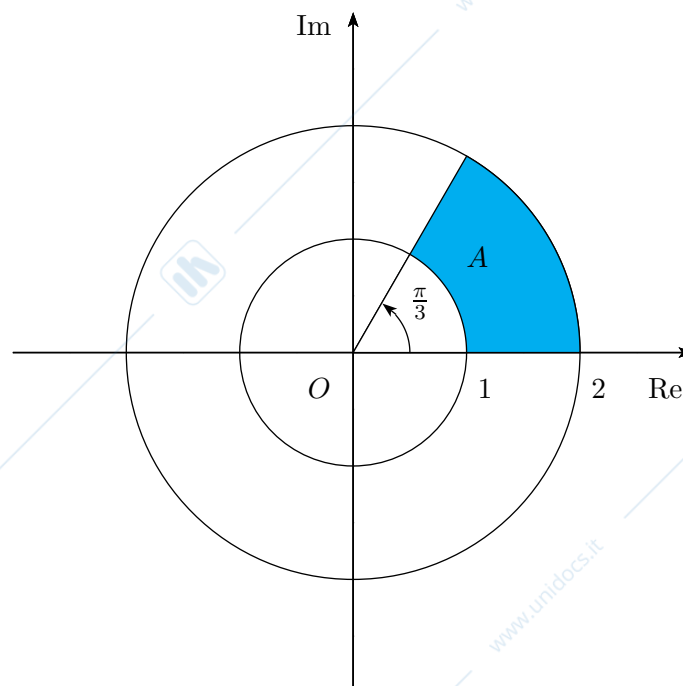
$$z_0 = \frac{3}{2} + i \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \quad z_1 = -3 + i, \quad z_2 = \frac{3}{2} + i \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Essi sono rappresentati nel piano di Gauss dai tre punti della circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio 3 qui disegnati:



- b) Posto $z = x + iy$, si ha $1 \leq |z| \leq 2 \iff 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$; dunque nel piano di Gauss soddisfano questa disequazione i punti della corona circolare compresa tra le due circonferenze di raggi 1 e 2.

I numeri complessi z per cui $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}$ sono i punti dell'angolo compreso tra la semiretta dell'asse reale positivo e la semiretta che forma con esso un angolo di $\frac{\pi}{3}$. Dunque l'insieme A è rappresentato dai punti del disegno sottostante:

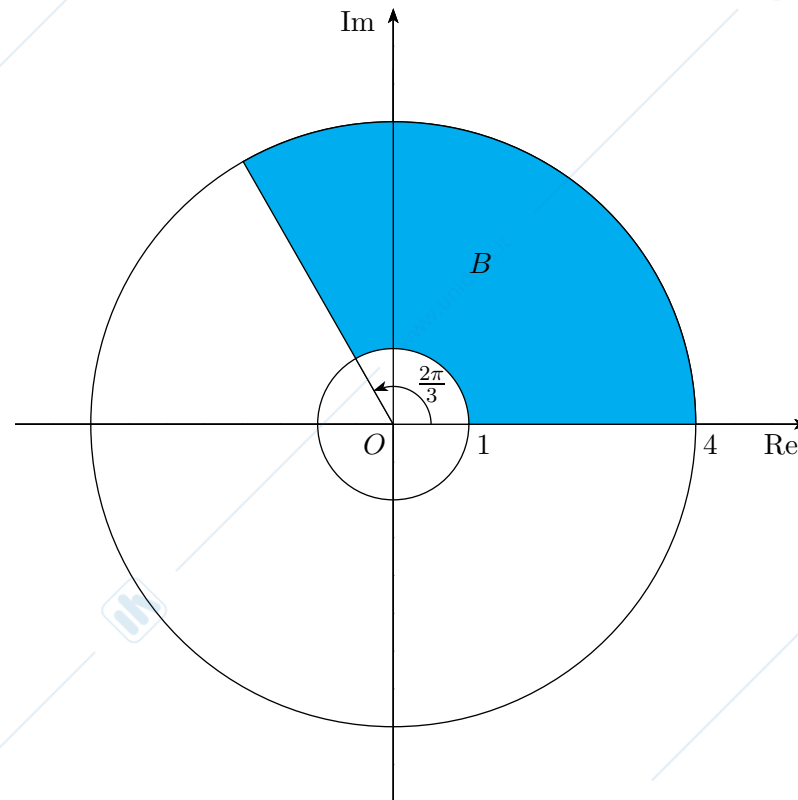


Per capire chi è B , scriviamo i punti di A in forma polare: posto $z = \rho e^{i\theta}$, si ha:

$$z \in A \iff 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Poiché $z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$, si ha $w \in B \iff 1 \leq |w| \leq 4, 0 \leq \arg(w) \leq \frac{2\pi}{3}$.

Dunque l'insieme B è rappresentato dai punti del disegno sottostante:



5 Esame del 3 luglio 2017

Esercizio 1. Si consideri la funzione:

$$f(x) = (x + 1) \cdot e^{\frac{1}{|x+1|-2}}.$$

- Determinarne il dominio, le eventuali proprietà di simmetria, i limiti agli estremi del dominio, e gli eventuali asintoti.
- Studiarne la derivabilità in ogni punto del dominio e calcolarne la derivata.
- Determinarne gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.
- Tracciare un grafico qualitativo di f .
- Stabilire se esiste un'estensione continua di f sull'intervallo $[-3, 1]$.

Esercizio 2.

- Enunciare il teorema della media integrale per le funzioni continue.
- Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Calcolare la media integrale della funzione sugli intervalli $[-1, 1]$ e $[-1, \frac{1}{2}]$, e dire se la media integrale è anche uno dei valori che la funzione assume in tali intervalli.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) Il denominatore dell'esponenziale si annulla per $x = -3$ e $x = 1$, da cui segue che

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}.$$

Inoltre, $f(x) = g(x+1)$ con $g(x) = x \cdot e^{\frac{1}{|x|-2}}$ che è una funzione dispari. Ne segue che il grafico di f è simmetrico rispetto al punto $(-1, 0)$. Inoltre

$$f(x) > 0 \iff x > -1 \quad \text{e} \quad f(x) = 0 \iff x = -1.$$

I limiti agli estremi del dominio sono

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty. \end{aligned}$$

Quindi, $x = -3$ è asintoto verticale sinistro, mentre $x = 1$ è asintoto verticale destro.

Poiché $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, si ha che per $x \rightarrow \pm\infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1) \cdot e^{\frac{1}{|x+1|-2}} = (x+1) \cdot \left[1 + \frac{1}{|x+1|-2} + o\left(\frac{1}{|x+1|-2}\right) \right] = \\ &= x+1 + \frac{x+1}{|x+1|-2} + o\left(\frac{x+1}{|x+1|-2}\right) = \end{aligned}$$

essendo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{|x+1|-2} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{|x+1|-2} = -1$ si ottiene

$$= \begin{cases} x+2+o(1) & x \rightarrow +\infty \\ x+o(1) & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Quindi la funzione ammette l'asintoto obliquo destro $y = x+2$ e l'asintoto obliquo sinistro $y = x$.

b) Si ha che

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x(x-3)}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} & x > -1, x \neq 1 \\ \frac{(x+5)(x+2)}{(x+3)^2} e^{-\frac{1}{x+3}} & x < -1, x \neq -3. \end{cases}$$

Essendo f continua in tutto il suo dominio e

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = e^{-\frac{1}{2}},$$

si conclude che f è derivabile anche in $x = -1$ con $f'(-1) = e^{-\frac{1}{2}}$. Quindi f è derivabile in tutto il suo dominio.

c) Per $x > -1$ si ha

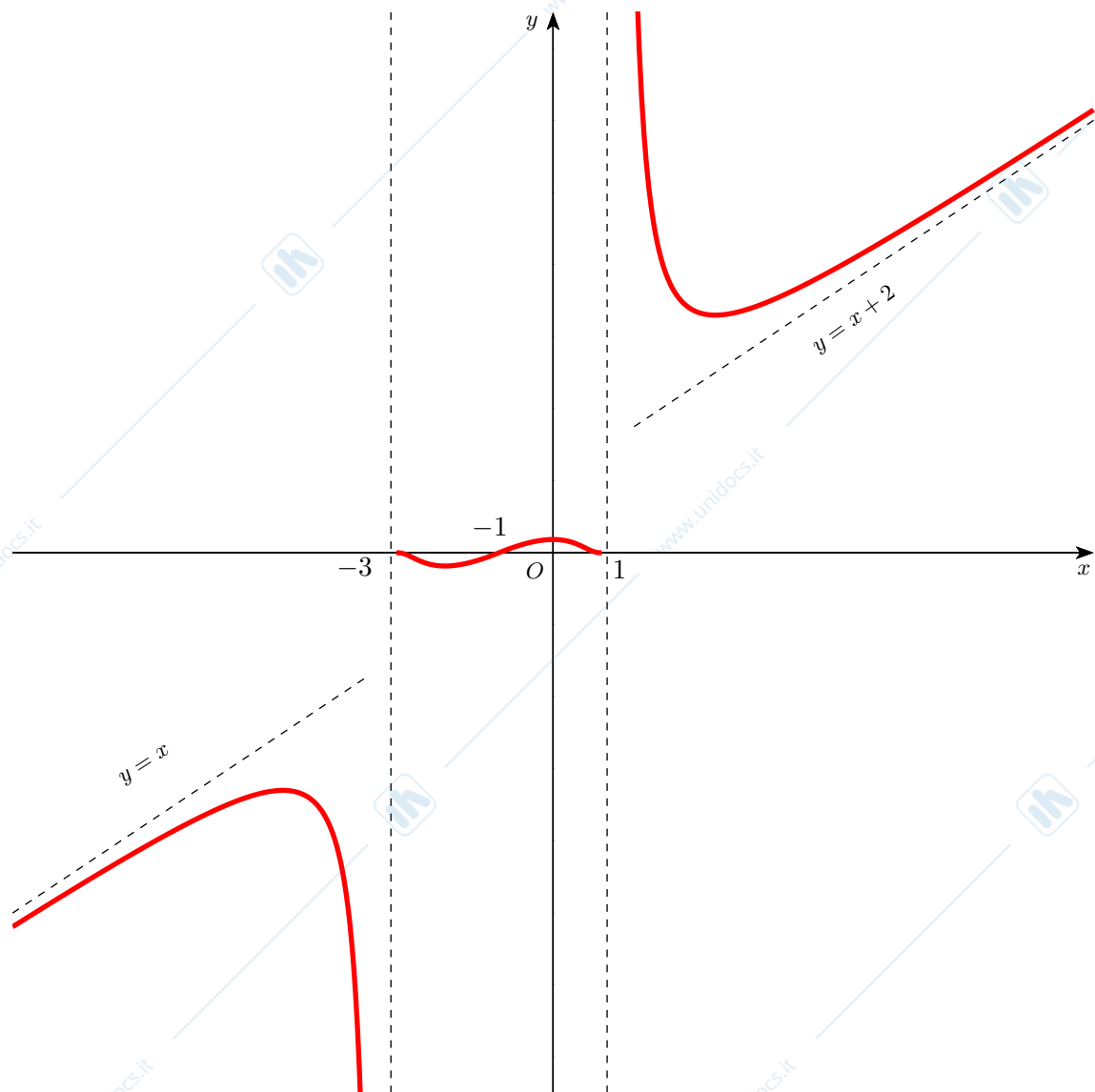
$$f'(x) \geq 0 \iff -1 < x \leq 0 \vee x \geq 3$$

e per $x \leq -1$

$$f'(x) \geq 0 \iff x \leq -5 \vee -2 \leq x \leq -1.$$

Ne segue che f è decrescente strettamente in $[-5, -3)$, $(-3, -2]$, $[0, 1)$ e in $(1, 3]$; è crescente strettamente in $(-\infty, -5]$, $[-2, 0]$ e in $[3, +\infty)$. In particolare, $x = -5$ e $x = 0$ sono punti di massimo relativo mentre $x = -2$ e $x = 3$ sono punti di minimo relativo. Infine, per quanto osservato precedentemente la funzione è superiormente e inferiormente illimitata, quindi non ammette punti di massimo o minimo assoluto.

d) Un grafico qualitativo di f è



e) Ricordando che $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ possiamo concludere che la funzione ammette

un'estensione continua \tilde{f} sull'intervallo $[-3, 1]$ definita nel modo seguente:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-3, 1) \\ 0 & x = -3, 1. \end{cases}$$

Esercizio 2.

a) Teorema (della media integrale per le funzioni continue)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = m(f; a, b)$, dove $m(f; a, b)$ è la media integrale di f sull'intervallo $[a, b]$ definita da

$$m(f; a, b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

b) La media integrale della funzione nell'intervallo $[-1, 1]$ è

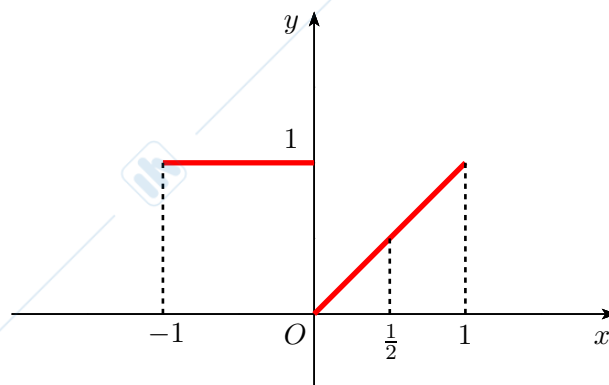
$$m(f; -1, 1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.$$

Poiché $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$ e $x = \frac{3}{4} \in [-1, 1]$, possiamo concludere che la media integrale di f su $[-1, 1]$ è uno dei valori che la funzione assume su questo intervallo.

La media integrale della funzione nell'intervallo $[-1, \frac{1}{2}]$ è

$$m\left(f; -1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{2}{3} \left(\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \right) = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{4}.$$

Poiché $f(x) = 1$ per ogni $x \in [-1, 0]$ e $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ per ogni $x \in [0, \frac{1}{2}]$, possiamo concludere che non esiste alcun punto $x \in [-1, \frac{1}{2}]$ in cui f assume il valore della sua media integrale su questo intervallo.



6 Esame del 19 settembre 2017

Esercizio 1. (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x|^3}{x^2 - 16}.$$

- (a) Identificare il dominio di $f(x)$, le eventuali proprietà di simmetria, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.
- (b) Studiare la derivabilità di $f(x)$ in ciascun punto del suo dominio e calcolarne la derivata.
- (c) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.
- (d) Tracciare qualitativamente il grafico di $f(x)$.
- (e) Sia $g(x) = \frac{|x|^n}{x^2 - 16}$ con n intero. Dire per quali valori di $n \in \mathbb{Z}$ la funzione $g(x)$ è derivabile in $x = 0$.

Esercizio 2. (5 punti)

- (a) Supponiamo che una funzione prenda valori di segno opposto in due punti a e b . Indicare condizioni sotto le quali il valore 0 appartiene all'immagine della funzione.
- (b) Si consideri la funzione

$$g(x) = \operatorname{sgn}((x-1)(x+3)), \quad \text{dove} \quad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ -1 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Dire se la funzione g si annulla sull'intervallo $[0, 4]$ e dire se, in tale intervallo, essa soddisfa le condizioni date al punto (a).

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

$$a) \text{ dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 16 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}.$$

Osserviamo che $f(-x) = f(x)$, quindi f è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y .

Inoltre:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{se } x \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty) \\ f(0) = 0 \\ f(x) < 0 & \text{se } x \in (-4, 0) \cup (0, 4). \end{cases}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

Ne segue che le rette $x = 4$ e $x = -4$ sono asintoti verticali di f .

$$\text{Inoltre } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Osserviamo inoltre che:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(x^2 - 16) + 16x}{x^2 - 16} = x + \frac{16x}{x^2 - 16} = x + o(1) & \text{per } x \rightarrow +\infty \\ f(x) &= \frac{-x(x^2 - 16) - 16x}{x^2 - 16} = -x - \frac{16x}{x^2 - 16} = -x + o(1) & \text{per } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Ne segue che la retta $y = x$ è l'asintoto obliquo destro di f , mentre la retta $y = -x$ è l'asintoto obliquo sinistro di f .

b) f è certamente derivabile su $\text{dom } f \setminus \{0\}$, perché è composizione di funzioni derivabili. In $x = 0$ invece è necessario valutare separatamente l'esistenza della derivata di f . Poiché

$$f(x) = \frac{|x|^3}{x^2 - 16} = \text{sgn}(x) \cdot \frac{x^3}{x^2 - 16},$$

possiamo limitarci a calcolare la derivata per $x > 0$. Otteniamo:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2} & x > 0, x \neq 4 \\ -\frac{x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2} & x < 0, x \neq -4. \end{cases}$$

f è continua in $x = 0$, e $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$. Dunque, per il teorema "del tappabuchi", f è derivabile anche in $x = 0$, con $f'(0) = 0$.

Ne segue che f è derivabile su tutto il suo dominio e non ha punti di non derivabilità.

c) Dal calcolo precedente, abbiamo che $x = 0$ e $x = \pm 4\sqrt{3}$ sono gli unici punti critici di f .

Inoltre:

- $f'(x) < 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -4\sqrt{3}) \cup (0, 4) \cup (4, 4\sqrt{3})$.
- $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-4\sqrt{3}, -4) \cup (-4, 0) \cup (4\sqrt{3}, +\infty)$.

Dai corollari del Teorema di Lagrange segue che:

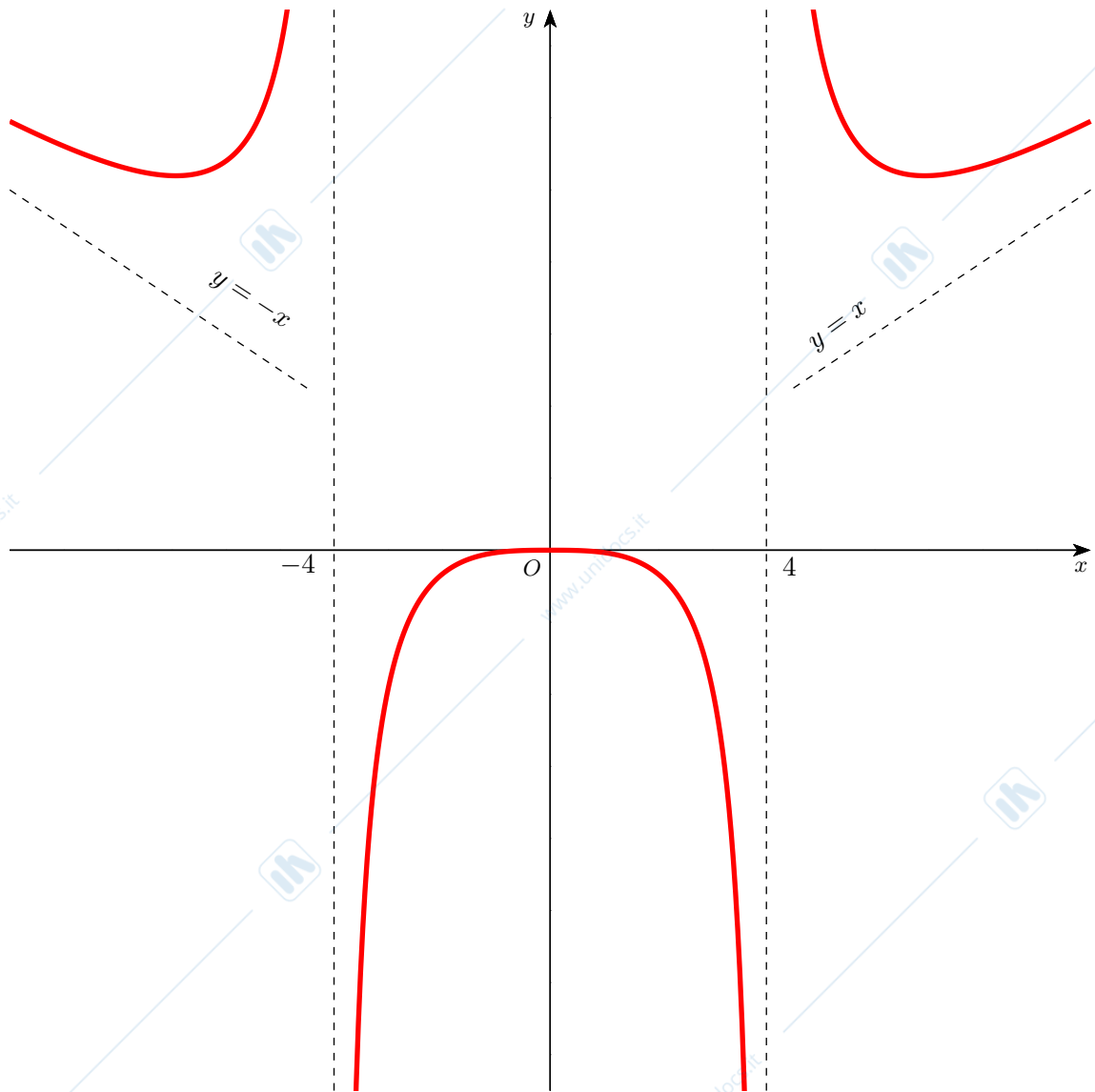
- f è strettamente decrescente su $(-\infty, -4\sqrt{3}]$, su $[0, 4)$ e su $(4, 4\sqrt{3}]$.
- f è strettamente crescente su $[-4\sqrt{3}, -4)$, su $(-4, 0]$ e su $[4\sqrt{3}, +\infty)$.

Inoltre

- $x = 0$ è l'unico punto di massimo (locale) di f .
- $x = 4\sqrt{3}$ e $x = -4\sqrt{3}$ sono gli unici punti di minimo (locale) di f .

Poiché $f(4\sqrt{3}) = f(-4\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} > 4\sqrt{3}$, il grafico di f non attraversa gli asintoti obliqui.

d) Un grafico qualitativo di f è



e) Per rispondere alla domanda, bisogna considerare separatamente vari casi.

- Per $n < 0$, $g(x) = \frac{|x|^n}{x^2 - 16}$ non è definita in $x = 0$. Pertanto g non è certamente derivabile in $x = 0$ se $n < 0$.
- Per $n = 0$, $g(x) = \frac{1}{x^2 - 16}$ è definita e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$; in particolare è derivabile in $x = 0$.
- Per $n = 1$, $g(x) = \frac{|x|}{x^2 - 16}$. In questo caso

$$g'(x) = -\operatorname{sgn}x \frac{x^2 + 16}{(x^2 - 16)^2}, \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 4\}.$$

g è continua in $x = 0$, mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -\frac{1}{16} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = \frac{1}{16}.$$

Ne segue che g non è derivabile in $x = 0$, che risulta essere un punto angoloso di g .

- Per $n \geq 2$, abbiamo che

$$g'(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \frac{|x|^{n-1}(nx^2 - 16n - 2x^2)}{(x^2 - 16)^2}.$$

Anche in questo caso g è continua in $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0.$$

Dunque g è derivabile in $x = 0$, con $g'(0) = 0$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$.

Esercizio 2.

- a) Possiamo imporre la condizione che la funzione sia continua in $[a, b]$. Questa condizione, unita all'ipotesi che la funzione prenda valori di segno opposto in a e in b garantisce, per il Teorema degli zeri, che la funzione abbia almeno uno zero in $[a, b]$.
- b) La funzione assegnata risulta essere uguale a:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < -3 \\ 0 & \text{se } x = -3 \\ -1 & \text{se } -3 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Dunque la funzione è discontinua nell'intervallo $[0, 4]$, $g(0) = -1 < 0$, $g(4) = 1 > 0$ e ha uno zero in $x = 1$. Pertanto non soddisfa le condizioni del punto precedente.

Osserviamo che questo fatto non è sorprendente: il Teorema degli zeri fornisce una condizione sufficiente, ma non necessaria all'esistenza degli zeri. Dunque esistono funzioni, come la g assegnata in questo esercizio, che sono discontinue, hanno valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo e che hanno degli zeri. Proponiamo un altro esempio, in cui f è ovunque discontinua e ha infiniti zeri.

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-\infty, 0) \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in [0, +\infty) \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

In questo caso h è ovunque discontinua, $h(-1) = -1 < 0$ e $h(1) = 1 > 0$. I punti irrazionali di $[-1, 1]$ sono gli zeri (infiniti) di h .