Quiz 2. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ semplice avente gli autovalori $0, 5$ entrambi con molteplicità 2. Posto $A := M(f)$, quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Le colonne di A non sono autovettori associati ad f.
b) $A^2 = 25A$.
c) A ha almeno una colonna nulla.
d) f è suriettiva.

Svolgimento. Sia P invertibile e tale che

$$P^{-1}AP = D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Poiché $A = PDP^{-1}$ si ha

$$A^n = (PDP^{-1})^n = \overbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})}^{n \text{ volte}} = PD^nP^{-1} = 5^{n-1}PDP^{-1} = 5^{n-1}A.$$

L'affermazione a) è falsa. Infatti l'i–esima colonna di A è $A_i := A\,{}^te_i$. Risulta

$$f(A_i) = AA_i = A(A\,{}^te_i) = A^2\,{}^te_i = 5A\,{}^te_i = 5A_i.$$

Da quanto osservato preliminarmente segue che l'affermazione b) è vera.

L'affermazione c) è falsa. Infatti, per esempio, sia

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

A è diagonalizzabile ed i suoi autovalori sono 0 e 5 entrambi con molteplicità 2, Ma A non ha nessuna colonna nulla.

L'affermazione d) è falsa. Risulta $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = 4$. D'altra parte l'autospazio di 0, $E_A(0)$, coincide per definizione con $\ker(f)$, sicché $\dim(\ker(f)) = 2$, sicché $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2 < 4$.

Quiz 3. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ avente gli autovalori $-7, 8, 9$ e sia $g := f^2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) g è un endomorfismo semplice.
b) g ha l'autovalore -7.
c) g ha l'autovalore nullo.
d) g non è iniettivo.

Svolgimento. Osserviamo che se $E_f(-7) := \mathcal{L}(v_1)$, $E_f(8) := \mathcal{L}(v_2)$, $E_f(9) := \mathcal{L}(v_3)$ sono gli autospazi di f allora $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$) e $g(v_1) = f(f(v_1)) = 49v_1$, $g(v_2) = f(f(v_2)) = 64v_2$, $g(v_3) = f(f(v_3)) = 81v_3$.

L'affermazione a) è vera. Infatti, per quanto osservato sopra, g ha tre autovalori distinti a due a due, quindi è semplice.

L'affermazione b) è falsa. Infatti gli autovalori di g sono esattamente $49, 64, 81$.

L'affermazione c) è falsa. Si veda quanto detto per b).

L'affermazione d) è falsa. Infatti sia $v \in \ker(f)$. Allora esiste una relazione $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$. Ma allora

$$\begin{aligned} 0 = g(v) &= g(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = \\ &= a_1g(v_1) + a_2g(v_2) + a_3g(v_3) = 49a_1v_1 + 64a_2v_2 + 81a_3v_3, \end{aligned}$$

che è una relazione di dipendenza lineare fra gli elementi di $\mathcal{B}$: poiché $\mathcal{B}$ è una base questo è possibile solo se $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, cioè solo se $v = 0$.