

Analogamente osserviamo che $(0, 0, 0, 0) \in V_2$. Poi

$$\begin{aligned}\alpha(q, p, q, r) &= (\alpha q, \alpha p, \alpha q, \alpha r) \in V_1, \\ (q, p, q, r) + (q', p', q', r') &= (q + q', p + p', q + q', r + r') \in V_1.\end{aligned}$$

Definiamo $e = (1, 0, 1, 0)$. Si noti che $e_2, e_4, e \in V_2$ e $(q, p, q, r) = qe + pe_2 + re_4$. Ancora l'identità di cui sopra implica che (e_2, e_4, e) è una base di V_2 .

Studiamo $V_1 \cap V_2$. Risulta che $v \in V_1 \cap V_2$ se e solo se è della forma $(0, p, 0, r) = (0, a, 0, d)$. In particolare $e_2, e_4 \in V_1 \cap V_2$, sono linearmente indipendenti (come osservato sopra) e, per esempio $(0, a, 0, d) = ae_2 + de_4$, quindi (e_2, e_4) è base di $V_1 \cap V_2$ che, perciò, ha dimensione 2.

Risulta

$$V_1 + V_2 = \mathcal{L}(e_2, e_3, e_4) + \mathcal{L}(e_2, e_4, e) = \mathcal{L}(e_2, e_3, e_4, e).$$

Si noti che $e_1 = e - e_3$ sicché

$$V_1 + V_2 = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4.$$

Segue che (e_1, e_2, e_3, e_4) è base di $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$. Ovviamente anche (e_1, e_2, e_3, e) è una base di $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 6. Siano

$$\begin{aligned}A &:= (1, 1, 1, 0), & B &:= (1, 2, 0, -1), & C &:= (0, -1, 1, 1), \\ D &:= (1, 0, -1, 3), & E &:= (3, 3, 0, 2)\end{aligned}$$

e $W = \mathcal{L}(A, B, C, D, E)$.

- (1) Determinare $\dim(W)$.
- (2) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W i cui elementi siano in $\{A, B, C, D, E\}$.
- (3) Verificare che $F := (2, 2, -1, 2) \in W$ e determinarne le componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$.
- (4) Completare $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{C}$ di V e determinare le componenti di F rispetto a $\mathcal{C}$.

Svolgimento. Chiaramente $\dim(W) \leq \dim(\mathbb{R}^4) = 4$. È sufficiente ridurre con operazioni elementari di riga la matrice M d'ordine 5×4 avente per righe i vettori A, B, C, D, E

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \\& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 \rightarrow R_5 - 3R_1} \\& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 \rightarrow R_5 - R_4} \\& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$