Esercizi

Esercizio 1. Sia

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \to (x + 2y + z, y + z).$$

(1) Verificare che f è lineare.
(2) Determinare una base di $\ker(f)$ e stabilire se f è iniettiva.
(3) Calcolare $w := f(2, 1, 3)$ e determinare $f^{-1}(w)$

Svolgimento. Verifichiamo che f è lineare. A tale scopo siano $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Risulta

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) + f(x', y', z') &= (x + 2y + z, y + z) + (x' + 2y' + z', y' + z') = \\
&= (x + 2y + z + x' + 2y' + z', y + z + y' + z') = \\
&= ((x + x') + 2(y + y') + (z + z'), (y + y') + (z + z')) = \\
&= f(x + x', y + y', z + z'), \\
\alpha f(x, y, z) &= (\alpha(x + 2y + z), \alpha(y + z)) = \\
&= ((\alpha x) + 2(\alpha y) + (\alpha z), (\alpha y) + (\alpha z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z).
\end{aligned}$$

Per determinare una base di $\ker(f)$ conviene prima descrivere tale insieme. Affinché $(x, y, z) \in \ker(f)$ si deve avere $(x + 2y + z, y + z) = (0, 0)$ ovvero

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

In particolare $\ker(f) = \{\ (z, -z, z) \in \mathbb{R}^3\ \}$. Quindi una base di $\ker(f)$ è costituita da $((1, -1, 1))$. f non è iniettiva poiché $\ker(f) \neq \{0\}$.

Si noti che anche senza fare conti è chiara la non iniettività di f. Infatti per una qualsiasi applicazione lineare $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vale $n = \dim(\ker(g)) + \dim(\operatorname{im}(g))$: quindi, affiché g sia iniettiva, è necessario (ma non sufficiente) che $n \leq m$.

Infine sia $w := f(v) \in \mathbb{R}^2$. Allora ricordo che $f^{-1}(w) = v + \ker(f)$. Quindi se $v = (2, 1, 3)$ si ha

$$f^{-1}(w) = \{\ (2 + h, 1 - h, 3 + h) \in \mathbb{R}^3 \mid h \in \mathbb{R}\ \}.$$

Esercizio 2. Siano $V := \mathbb{R}^4$, $W := \mathbb{R}^3$.

(1) Verificare che i vettori

$$v_1 := (1, 0, 0, 0), \quad v_2 := (1, 3, 5, 0), \quad v_3 := (3, 2, -1, 1), \quad v_4 := (1, 1, 0, 0)$$

formano una base $\mathcal{B}$ di V.