DIAGONALIZZAZIONE

Esercizi

Esercizio 1. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ associato alla matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare gli autovalori di f e le relative molteplicità.
(2) Determinare gli autospazi di f e trovare, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.
(3) Calcolare una matrice P invertibile tale che $P^{-1}M(f)P$ sia diagonale.

Svolgimento. Per calcolare gli autovalori di f dobbiamo calcolare il polinomio caratteristico $p_f(t)$ di f

$$p_f(t) := \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 1 & t-2 & 0 \\ 1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)^2.$$

Dunque gli autovalori sono $t_1 = 1$ con molteplicità $m_a(1) = 1$ e $t_2 = t_3 = 2$ con $m_a(2) = 2$. Si noti che a tale risultato si poteva anche giungere senza il calcolo del polinomio caratteristico in quanto la matrice $M(f)$ è triangolare (inferiore): dunque gli autovalori sono esattamente gli elementi diagonali e la loro molteplicità è quella con cui compaiono sulla diagonale.

Per determinare gli autospazi dobbiamo in generale risolvere i sistemi $(t_i I - M(f))\ {}^t(x, y, z) = 0$, $i = 1, 2, 3$, ove I è la matrice identità 3×3. Nel nostro caso

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il primo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzione l'autospazio $E_f(1) := \mathcal{L}((1, 1, 1))$. Il secondo sistema è equivalente a

$$x = 0,$$

che ha per soluzione l'autospazio $E_f(2) := \mathcal{L}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

Concludiamo che una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori è $\mathcal{B} := ((1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

Ricordo, infine, che fissata una base composta da autovettori una matrice P invertibile tale che $P^{-1}M(f)P$ sia diagonale ha per colonne i vettori della base di autovettori.

Quindi possiamo scegliere

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$