Inoltre $\det(A_4) = -1$, $\det(B_4) = 3$, sicché una forma canonica di $\mathcal{C}_4$ è

$$(\sqrt{17}+4)x^2 - (\sqrt{17}-4)y^2 = 3.$$

Concludiamo con il terzo quesito. Se l'equazione canonica $\mathcal{C}_h$ è

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

con α e β discordi gli asintoti sono individuati dal polinomio $\alpha x^2 + \beta y^2$: in particolare essi sono $y = \pm\sqrt{-\alpha/\beta}x$. D'altra parte $\pm\sqrt{-\alpha/\beta}$ è la tangente trigonometrica dell'angolo formato dall'asintoto con il semiasse positivo delle ascisse misurato in verso antiorario: poiché l'asse delle ascisse del sistema di riferimento canonico è mediana dell'angolo formato dagli asintoti si deve avere $\sqrt{-\alpha/\beta} = \tan\pi/3 = \sqrt{3}$. Il polinomio caratteristico di A_h è

$$p_{A_h}(t) = \begin{vmatrix} 3-t & h \\ h & 5-t \end{vmatrix} = t^2 - 8t + 15 - h^2 = (t - 4 - \sqrt{1+h^2})(t - 4 + \sqrt{1+h^2}).$$

Perché $\mathcal{C}_h$ sia un'iperbole abbiamo visto che deve essere $|h| > \sqrt{15}$: allora per i due autovalori di A_h vale $4+\sqrt{1+h^2} > 0$, $4 - \sqrt{1+h^2} < 0$. Quindi i valori di h cercati devono soddisfare

$$\frac{4+\sqrt{1+h^2}}{-4+\sqrt{1+h^2}} = 3:$$

risulta perció $h = \pm 3\sqrt{7}$ (si noti che per entrambi questi valori $\mathcal{C}_h$ è non degenere).

Quiz

Quiz 1. Sia data la forma quadratica $q(x,y) = 2x^2 + 8xy + 7y^2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) q è definita positiva.
b) q è definita negativa.
c) q è semidefinita.
d) q è indefinita.

Svolgimento. Come è noto si può procedere in diversi modi.

Un primo metodo è quello di formazione dei quadrati: poiché

$$2x^2 + 8xy + 7y^2 = 2(x^2 + 4xy) + 7y^2 = 2(x+2y)^2 - 8y^2 + 7y^2 = 2(x+2y)^2 - y^2$$

segue che se, per esempio $x + 2y > 0$ e $y = 0$ allora $q(x,y) > 0$, mentre se $x + 2y = 0$ e $y > 0$ allora $q(x,y) < 0$, dunque q risulta essere indefinita.

Un secondo metodo è quello delle operazioni elementari: la matrice (simmetrica) della forma quadratica q è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix},$$

dunque

$$A \xrightarrow{C_2 \to C_2 - 2C_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Riotteniamo così che q è indefinita.

Un terzo metodo si basa sulla regola di Cartesio: per determinare il segno di q è sufficiente determinare il segno dei suoi autovalori, cioè, essendo A simmetrica, delle radici del suo polinomio caratteristico $p_A(t)$. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & 4 \\ 4 & 7-t \end{pmatrix} = t^2 - 9t - 2.$$

Chiaramente $t = 0$ non è radice di $p_A(t)$. Poiché la sequenza $(1, -9, -2)$ presenta una variazione di segno segue che $p_A(t)$ ha una radice positiva ed una negativa: concludiamo che q è indefinita.