

Lezione 5

5.1 Risoluzione di sistemi

Sia $AX = B$ un sistema di equazioni lineari, con la sua matrice completa associate $(A|B)$. Per la Proposizione 4.4 sappiamo di poter trasformare con operazioni elementari di riga la matrice A in una nuova matrice A' fortemente ridotta per righe: con le stesse operazioni elementari si ottiene una nuova matrice $(A'|B')$ corrispondente, in generale, ad un nuovo sistema di equazioni lineari $A'X = B'$, diverso dal precedente ma ad esso equivalente. Risolvendo, se possibile, tale sistema con il metodo descritto nell'Esempio 4.2 otteniamo l'insieme delle soluzioni del sistema di partenza.

Lemma 5.1. *Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e siano $A, A' \in K^{m,n}$, $B, B' \in K^{m,1}$ matrici. Sia $(A|B)$ la matrice completa associata al sistema lineare di m equazioni in n incognite $AX = B$ e sia $(A'|B')$ matrice equivalente per righe a $(A|B)$. Allora i sistemi $AX = B$ e $A'X = B'$ sono equivalenti.*

Dimostrazione. L'enunciato segue dal fatto che ogni operazione elementare non cambia l'insieme delle soluzioni di un sistema. Questo è ovvio per le operazioni (E2) e (E3). Nel caso dell'operazione (E1) è sufficiente imitare quanto fatto nell'Esempio 4.2. \square

Siamo finalmente pronti ad enunciare e dimostrare il principale risultato sulla teoria dei sistemi di equazioni lineari, detto Teorema di Rouché–Capelli.

Proposizione 5.2 (Teorema di Rouché–Capelli). *Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $A \in K^{m,n}$ e $B \in K^{m,1}$ matrici; si consideri il sistema lineare di m equazioni in n incognite $AX = B$, con matrice completa associata $(A|B)$. Allora*

- (i) *il sistema è compatibile se e solo se $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$;*
- (ii) *se il sistema è compatibile, le sue soluzioni dipendono da $n - \text{rk}(A)$ parametri liberi;*
- (iii) *se il sistema è compatibile e X_0 è una sua soluzione fissata, allora ogni altra sua soluzione X è della forma $X = X_0 + Y$, dove Y appartiene all'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato $AX = 0_{m,1}$.*

Dimostrazione.

- (i) Per quanto visto sopra possiamo assumere senza perdere in generalità che A sia una matrice fortemente ridotta per righe. Si possono presentare due situazioni per le righe della matrice completa $(A|B)$.

Il primo caso è che esista una riga di A , diciamo quella di indice i , con entrate tutte nulle che si prolunga in $(A|B)$ a una riga con entrate non tutte nulle: chiaramente l'entrata non nulla deve essere l' i -esima entrata di B , cioè $b_i \neq 0$. In particolare quindi $\text{rk}(A) \neq \text{rk}(A|B)$. Ciò significa che nel nostro sistema figura un'equazione della forma $0 = b_i$ che, per l'ipotesi $b_i \neq 0$, non ha soluzioni e cioè il sistema è incompatibile.

Nel secondo caso ogni riga di A con entrate tutte nulle si prolunga in $(A|B)$ a una riga con entrate tutte nulle (è anche possibile che queste righe non esistano). In questo caso possiamo risolvere il sistema come spiegato nell'Esempio 3.7, e il sistema è compatibile: inoltre i numeri di righe di A e di $(A|B)$ contenenti entrate non nulle coincidono, cioè $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$.

- (ii) Quanto visto nella parte (i) dimostra anche l'affermazione (ii): infatti possiamo esprimere le incognite i cui coefficienti sono i pivot (e che sono in totale $\text{rk}(A)$) in funzione delle rimanenti incognite (in totale $n - \text{rk}(A)$), cui possiamo dare valori arbitrari.
- (iii) Sia $X_0 \in \mathbb{R}^{n,1}$ una soluzione fissata del sistema, cioè $AX_0 = B$, e sia $X \in \mathbb{R}^{n,1}$ un'altra soluzione del sistema, quindi tale che $AX = B$. Sia $Y = X - X_0$, allora

$$AY = A(X - X_0) = AX + A(-X_0) = AX + A(-1)X_0 = AX - AX_0 = B - B = 0_{m,1},$$

quindi Y è soluzione del sistema omogeneo associato.

Viceversa sia $Y \in \mathbb{R}^{n,1}$ una soluzione del sistema omogeneo associato, cioè tale che $AY = 0_{m,1}$. Sia $X = Y + X_0$, allora

$$AX = A(Y + X_0) = AY + AX_0 = 0_{m,1} + B = B,$$

e quindi X è soluzione del sistema di partenza, come volevamo dimostrare. \square

Esempio 5.3. Si consideri il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le matrici incompleta e completa del sistema sono rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad (A|B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 7 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che nell'Esempio 4.6 abbiamo già ridotto A alla matrice ridotta per righe

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Utilizziamo le stesse operazioni di riga alla matrice completa $(A|B_1)$: rifacciamo cioè gli stessi passaggi ma teniamo conto anche dell'effetto delle operazioni su B_1 .

$$(A|B_1) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} = (A'|B'_1).$$

Si noti che $\text{rk}(A) = \text{rk}(A') = 3$ mentre $\text{rk}(A|B_1) = \text{rk}(A'|B'_1) = 4$: da questo deduciamo che il sistema $AX = B_1$ è incompatibile. ♠

Esempio 5.4. Si consideri ora il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le matrici incompleta e completa del sistema sono rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad (A|B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix},$$

quindi la matrice incompleta è di nuovo quella dell'Esempio 4.6. Utilizzando le stesse operazioni elementari e tenendo di nuovo conto del loro effetto su B_2 , troviamo

$$(A|B_2) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} = (A'|B'_2).$$

Poiché $\text{rk}(A) = \text{rk}(A') = 3 = \text{rk}(A'|B'_2) = \text{rk}(A|B_2)$ segue che il sistema in esame è compatibile. Perciò proseguiamo con le operazioni elementari di riga riducendo ulteriormente la matrice completa del sistema, in modo da trovarne le soluzioni.

Di nuovo, nell'Esempio 4.6 avevamo già ridotto A ad una forma fortemente ridotta per righe, ora applichiamo le stesse operazioni di riga alla matrice completa $(A|B_2)$:

$$\begin{aligned}
 (A'|B'_2) &\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2/2 \\ R_4 \rightarrow -R_4/2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 3R_4/2 \\ R_1 \rightarrow R_1 - R_4}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -\frac{19}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & \frac{37}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -\frac{19}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & \frac{37}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -\frac{19}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (\widehat{A}|\widehat{B}_2).
 \end{aligned}$$

Quindi il sistema $AX = B_2$ è equivalente al sistema $\widehat{A}X = \widehat{B}_2$, che è compatibile perché $\text{rk}(A) = \text{rk}(\widehat{A}) = 3 = \text{rk}(\widehat{A}|\widehat{B}_2) = \text{rk}(A|B_2)$.

In particolare le incognite corrispondenti ai pivot sono a , b , c e si ha

$$\begin{cases} a = \frac{5}{4} - 6d - \frac{37}{4}e \\ b = -\frac{3}{4} + 3d + \frac{19}{4}e \\ c = -\frac{1}{2} + 2d + \frac{7}{2}e \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema di partenza è quindi

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{5}{4} - 6d - \frac{37}{4}e \\ -\frac{3}{4} + 3d + \frac{19}{4}e \\ -\frac{1}{2} + 2d + \frac{7}{2}e \\ d \\ e \end{array} \right) \mid d, e \in \mathbb{R} \right\}.$$

Per esempio, se scegliamo i valori $d = e = 0$ otteniamo la soluzione particolare $X_0 = {}^t(5/4 \ -3/4 \ -1/2 \ 0 \ 0)$. Si noti che ogni altra soluzione è della forma

$$\begin{pmatrix} 5/4 \\ -3/4 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} -37/4 \\ 19/4 \\ 7/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

al variare di d e e in \mathbb{R} . Si verifichi che le soluzioni del sistema $AX = 0_{m,1}$ sono tutte e sole le matrici della forma

$$d \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} -37/4 \\ 19/4 \\ 7/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

al variare di d e e in \mathbb{R} , come previsto dal Teorema di Rouché-Capelli. ♠

5.2 Equazioni matriciali

Negli Esempi 5.3 e 5.4 abbiamo studiato due diversi sistemi $AX_1 = B_1$ e $AX_2 = B_2$ aventi la stessa matrice incompleta A ; questo tipo di problema si presenta in varie situazioni (vedremo in seguito il problema del calcolo della matrice inversa). È evidente che è inutile ripetere le stesse operazioni per ciascun sistema, e che sarebbe più conveniente risolvere i sistemi simultaneamente.

La risoluzione “simultanea” dei due sistemi indicati sopra equivale a considerare le soluzioni dell’equazione matriciale $AX = B$ ove X e B sono rispettivamente una matrice incognita ed una numerica aventi colonna di indice j pari ad X_j e B_j rispettivamente.

Vediamo più in dettaglio di cosa si tratta nella seguente definizione.

Definizione 5.5 (Equazioni matriciali e loro soluzioni). Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e siano $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{m,n}$ e $B = (b_{i,h})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq h \leq p}} \in K^{m,p}$ matrici.

Un’equazione matriciale lineare con matrice incompleta A e matrice dei termini noti B è un’equazione della forma

$$AX = B, \tag{5.2.1}$$

dove X è una matrice incognita $n \times p$.

La matrice

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_{1,1} & \dots & b_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_{2,1} & \dots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_{m,1} & \dots & b_{m,p} \end{array} \right)$$

viene detta *matrice completa* dell’equazione (5.2.1).

L’equazione (5.2.1) si dice *omogenea* se $B = 0_{m,p}$, *non omogenea* $B \neq 0_{m,p}$. Una *soluzione dell’equazione* (5.2.1) è una matrice numerica $\bar{X} \in K^{n,p}$ per cui vale l’identità numerica $A\bar{X} = B$; se esiste una soluzione, l’equazione (5.2.1) si dice *compatibile*, altrimenti *incompatibile*.

L'equazione (5.2.1) può essere pensata come sistema di mp equazioni, una per ogni entrata di B , in np incognite, una per ogni entrata di X .

Si noti però che la riga di indice i di A definisce esattamente p equazioni di tale grande sistema, una per ogni entrata della riga di indice i della matrice B .

Fissato un tale i , l'entrata $a_{i,j}$ moltiplica nelle equazioni considerate tutte le entrate $x_{h,j}$ di X per $j = 1, \dots, p$. Indicata con X_h la riga di indice h di X , possiamo allora pensare all'equazione (5.2.1) come un sistema di m equazioni corrispondenti alle m righe di $(A|B)$ nelle n incognite matriciali della forma

$$\begin{cases} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \dots + a_{1,n}X_n = (b_{1,1} \dots b_{1,p}) \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \dots + a_{2,n}X_n = (b_{2,1} \dots b_{2,p}) \\ \vdots \\ a_{m,1}X_1 + a_{m,2}X_2 + \dots + a_{m,n}X_n = (b_{m,1} \dots b_{m,p}). \end{cases}$$

Ne segue che il metodo di soluzione delle equazioni matriciali è totalmente analogo a quello dei sistemi di equazioni lineari (che ne sono un caso particolare quando la matrice dei termini noti si riduce ad un'unica colonna). Infatti esso si basa sulla riduzione della matrice completa $(A|B)$ con operazioni elementari di riga che continuano ad avere senso anche per incognite di tipo matriciale.

Esempio 5.6. Si consideri l'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.2.2)$$

la cui matrice completa è

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

corrispondente al sistema

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 = (1 \ 2) \\ 2X_1 + X_2 = (0 \ 1). \end{cases}$$

Trasformando $(A|B)$ con operazioni elementari di riga otteniamo

$$\begin{aligned} (A|B) &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Pertanto l'equazione (5.2.2) è equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix},$$

ovvero al sistema ad incognite matriciali

$$\begin{cases} X_1 = (-1/3 & 0) \\ X_2 = (2/3 & 1) \end{cases}$$

che, come unica soluzione, ha ovviamente la matrice

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio 5.7. Si consideri l'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.3)$$

la cui matrice completa è

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

L'equazione (5.2.3) equivale al sistema

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 = (1 & -1) \\ X_1 - X_2 + X_3 = (1 & 0). \end{cases}$$

Trasformando $(A|B)$ con operazioni elementari di riga otteniamo

$$\begin{aligned} (A|B) &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2/3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pertanto l'equazione (5.2.3) è equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

ovvero a

$$\begin{cases} X_1 + X_3 = (1 & -1/3) \\ X_2 = (0 & -1/3). \end{cases}$$

Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione (5.2.3) è

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc|c} 1 - x_{3,1} & -1/3 - x_{3,2} & \\ 0 & -1/3 & \\ x_{3,1} & x_{3,2} & \end{array} \right) \mid x_{3,1}, x_{3,2} \in \mathbb{R} \right\}.$$

In particolare le soluzioni dipendono da $1 = 3 - 2 = n - \text{rk}(A)$ righe libere. ♠

Anche per equazioni matriciali vale il Teorema di Rouché–Capelli. Lo enunciamo omettendone la dimostrazione in quanto totalmente analoga a quella della Proposizione 5.2.

Proposizione 5.8 (Teorema di Rouché–Capelli per equazioni matriciali).

Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e siano $A \in K^{m,n}$ e $B \in K^{m,p}$ matrici. Si consideri l'equazione matriciale $AX = B$, con matrice completa associata $(A|B)$. Allora

- (i) l'equazione è compatibile se e solo se $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$;
- (ii) se l'equazione è compatibile, allora le matrici $n \times p$ che sono sue soluzioni dipendono da $n - \text{rk}(A)$ righe libere;
- (iii) se l'equazione è compatibile e X_0 è una sua soluzione fissata, allora ogni altra sua soluzione X è della forma $X = X_0 + Y$, dove Y appartiene all'insieme dell'equazione matriciale omogenea associata $AX = 0_{m,p}$.

Esempio 5.9. Si considerino i sistemi degli Esempi 5.3 e 5.4; invece di risolverli separatamente consideriamo l'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \\ e_1 & e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice completa associata è

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Con operazioni elementari per riga, tenendo conto dei già citati Esempi 5.3 e 5.4, possiamo trasformarla nella matrice

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 6 & \frac{37}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -\frac{19}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{7}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Deduciamo che l'equazione è incompatibile perché $\text{rk}(A) = 3 < 4 = \text{rk}(A|B)$ (infatti ogni sua soluzione darebbe una soluzione del sistema avente come colonna dei termini noti la prima colonna di B , che è incompatibile, come già visto nell'Esempio 5.3). ♠

5.3 Calcolo dell'inversa di una matrice

Un caso particolarmente interessante di equazione matriciale è quello della forma $AX = I_n$ ove $A \in K^{n,n}$ è una matrice quadrata. Infatti A è invertibile se e solo se il sistema $AX = I_n$ ha soluzione e in tal caso l'unica soluzione è $X = A^{-1}$.

Proposizione 5.10. Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Una matrice quadrata $A \in K^{n,n}$ è invertibile se e solo se $\text{rk}(A) = n$.

Dimostrazione. Chiedere che A sia invertibile equivale a chiedere che $AX = I_n$ abbia soluzione. La Proposizione 5.8 indica che questo avviene se e solo se $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|I_n)$: quest'ultima matrice è fortemente ridotta per righe ed il suo rango è esattamente $\text{rk}(I_n) = n$. \square

La proposizione precedente ci fornisce anche un metodo per calcolare A^{-1} , in caso essa esista.

Tale metodo consiste nello scrivere la matrice completa $(A|I_n)$, e con trasformazioni elementari di riga ridurre tale matrice alla matrice fortemente ridotta $(A'|A'')$. Su ogni riga di A' ci deve essere un'entrata pari ad 1, poiché $\text{rk}(A) = n$: poiché ci sono n colonne su ogni riga tutte le entrate sono nulle eccetto una che vale 1 e che si trova sempre in una colonna diversa. Quindi, semplicemente con permutazioni di riga, si può ulteriormente trasformare $(A'|A'')$ in una nuova matrice della forma $(I_n|A''')$. A questo punto si osservi che l'equazione di partenza è equivalente a $I_n X = A'''$, dunque $A^{-1} = A'''$.

Esempio 5.11. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo stabilire se A è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

A tale scopo scriviamo la matrice $(A|I_3)$ trasformandola, come spiegato sopra, con operazioni elementari di riga:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) = A' \end{aligned}$$

Notiamo che i passaggi fatti sono sufficienti per calcolare che $\text{rk}(A) = 3$, e dunque che A è invertibile, perciò ha senso continuare il calcolo di A^{-1} :

$$\begin{aligned} A' &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \\ R_1 \rightarrow R_1 - 2R_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Concludiamo che

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

