RETTE E PIANI

Esercizi

Esercizio 1. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si considerino la retta r_h ed il piano α rispettivamente di equazioni

$$r_h: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = ht, \end{cases} \qquad \alpha: \; x+y+z+1=0,$$

ove $h \in \mathbb{R}$. Determinare i valori di h per cui

(1) r_h e α sono incidenti ed, in tal caso, determinare l'angolo ϑ_h da essi formato;
(2) r_h e α sono paralleli ed, in tal caso, determinare la distanza $\mathrm{dist}(r_h, \alpha)$ fra di loro.

Svolgimento. La retta r_h passa per il punto $P(1,1,0)$ ed è parallela al vettore $\vec{v}_{r_h} := \vec{\imath} - \vec{\jmath} + h\vec{k}$. Invece α è il piano passante per $(0,0,-1)$ e perpendicolare al vettore $\vec{v}_\alpha := \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

Allora r_h e α sono paralleli se e solo se $\vec{v}_{r_h} \perp \vec{v}_\alpha$, cioè se e solo se

$$h = 1-1+h = \vec{v}_{r_h} \cdot \vec{v}_\alpha = 0,$$

cioè se e solo se $h=0$. Per ogni altro valore di h r_h e α risultano essere incidenti.

Calcoliamo $\mathrm{dist}(r_0, \alpha)$. A tale scopo è sufficiente calcolare $\mathrm{dist}(Q, \alpha)$ per un qualsiasi punto $Q \in r_0$, per esempio $Q := P$. Si ha

$$\mathrm{dist}(r_0, \alpha) = \frac{|1+1+0+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}.$$

In generale l'angolo formato da r_h e α è esattamente $\pi/2 - \widehat{\vec{v}_{r_h}\vec{v}_\alpha}$. Si ha

$$\cos\widehat{\vec{v}_{r_h}\vec{v}_\alpha} = \frac{\vec{v}_{r_h} \cdot \vec{v}_\alpha}{|\vec{v}_{r_h}||\vec{v}_\alpha|} = \frac{h}{\sqrt{3(2+h^2)}}.$$

In particolare

$$\vartheta_h = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{h}{\sqrt{3(2+h^2)}} = \arcsin\frac{h}{\sqrt{3(2+h^2)}}.$$

Esercizio 2. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si considerino le rette r ed s rispettivamente di equazioni

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = -1-t, \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = t \\ y = 1+2t \\ z = 2+t. \end{cases}$$

(1) Verificare che r ed s sono sghembe.
(2) Calcolare l'angolo ϑ che esse formano.
(3) Calcolare la distanza $\mathrm{dist}(r,s)$ fra di loro.
(4) Determinare la retta di minima distanza.