Esercizio 4. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy sia data la parabola $\mathcal{C}$ con vertice in $V(-2,2)$, asse parallelo ad $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ e passante per $P(0,2)$.

(1) Determinare l'equazione di $\mathcal{C}$.
(2) Determinare una forma canonica di $\mathcal{C}$.
(3) Calcolare le equazioni di una rototraslazione che riduce $\mathcal{C}$ in tale forma canonica.

Svolgimento. Per definizione l'asse di $\mathcal{C}$ contiene il vertice, dunque è la retta r d'equazione $x-y+4$. Ricordiamo che per una parabola il sistema di riferimento canonico $O'x'y'$ ha origine $O'=V$, un asse coincidente con l'asse della parabola stessa, l'altro passante per V.

Nel nostro caso quindi $O'(-2,2)$. Scegliamo l'asse delle ascisse parallelo ad $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ ed orientato concordemente. L'asse delle ordinate deve essere allora parallelo e concorde con $-\vec{\imath}+\vec{\jmath}$. Concludiamo che i versori $\vec{\imath}'$, $\vec{\jmath}'$ devono essere paralleli e concordi con i versori

$$\tilde{\imath}=\sqrt{2}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})/2, \qquad \tilde{\imath}=\sqrt{2}(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})/2.$$

In particolare la corrispondente rototraslazione che riduce $\mathcal{C}$ in forma canonica è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

la cui inversa è

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

L'equazione di $\mathcal{C}$ nelle nuove coordinate $O'x'y'$ è della forma $y'^2=2px'$. Poiché il punto P nel nuovo sistema di riferimento ha coordinate $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ segue che $2p=\sqrt{2}$ ovvero che un'equazione canonica per $\mathcal{C}$ è

$$y'^2=\sqrt{2}x'.$$

Sostituendo in tale equazione le espressioni che legano x,y ad x',y' si ottiene l'equazione di $\mathcal{C}$ nel sistema di riferimento Oxy, cioè (moltiplicando per 2)

$$x^2-2xy+y^2+6x-10y+16=0.$$

Esercizio 5. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy siano date le rette r ed s rispettivamente di equazione

$$x+3y-1=0, \qquad 3x+y-3=0.$$

(1) Descrivere la famiglia $\mathcal{F}$ delle iperboli aventi r ed s come asintoti.
(2) Determinare in $\mathcal{F}$ tutte le iperboli degeneri.
(3) Ridurre a forma canonica l'iperbole $\mathcal{C}$ di $\mathcal{F}$ passante per l'origine.

Svolgimento. L'equazione delle coniche in $\mathcal{F}$ deve essere del tipo

$$(x+3y-1)(3x+y-3)+c=0$$

ove $c\in\mathbb{R}$, ovvero $p_c(x,y)=0$ ove $p_c(x,y)=3x^2+10xy+3y^2-6x-10y+3+c$.

La corrispondente matrice 3×3 è

$$B_c=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 5 & 3 & -5 \\ -3 & -5 & 3+c \end{pmatrix}.$$