Limiti di funzioni e continuità

- Definizione di limite
  - Limite destro e sinistro, per difetto e per eccesso
  - Asintoti verticale e orizzontale
  - Teorema di unicità del limite, della permanenza del segno, di esistenza per funzioni monotone, del confronto
- Definizione di continuità
  - Punti di discontinuità
  - Limiti delle funzioni elementari
  - Forme indeterminate
  - Teoremi di Weierstrass, degli zeri e di Darboux
- Calcolo dei limiti
  - Funzioni infinite e infinitesime
  - Notazioni o-piccolo e asintotico
  - Asintoto obliquo

Punti di accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

Un punto b si dice *di accumulazione* per A se ogni intorno di b contiene elementi di A diversi da b.

Un punto b si dice *di accumulazione destro* (rispett. *sinistro*) per A se ogni intorno destro (rispett. destro) di b contiene elementi di A diversi da b.

La definizione di punto di accumulazione si applica anche al caso di $+\infty$ e di $-\infty$.

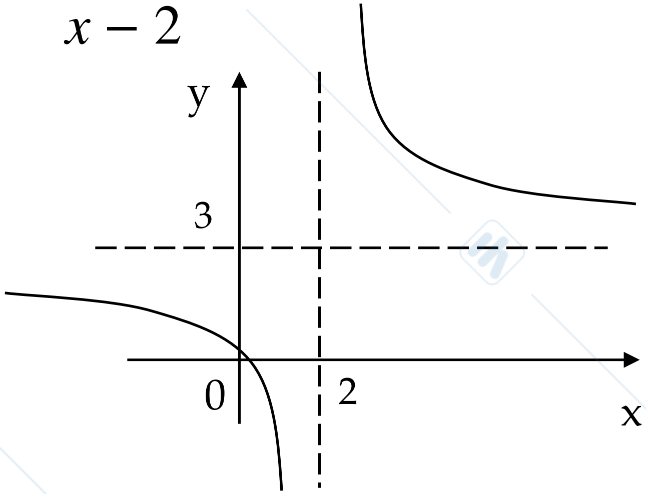
OSSERVAZIONE - Se b è un punto interno ad A allora b è di accumulazione per A.

ESEMPIO - Sia $A = (-1, 1) \cup \{2, 3\}$. Il punto 1 è di accumulazione per A, poiché ogni intorno di 1 è della forma $(1 - h, 1 + h)$ e interseca A in punti $\neq 1$. Il punto 2 invece non è di accumulazione per A, poiché ad esempio l'intorno $(2 - 1/2, 2 + 1/2)$ non interseca A.

ESERCIZIO - Determinare tutti i punti di accumulazione per l'insieme A

Definizione di limite

Esempio: $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$



$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3^+$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3^-$$

Definizione:

$f : A \subseteq R \to R,\ c \in R^*$, $c \in A'$, diremo che :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad \text{con } L \in R^*$$

quando $\forall$ intorno I (L), fissato arbitrariamente, $\exists$ un intorno di I(c) tale che per ogni x di A appartenente a I(c) (con al più $x \neq c$) , la sua immagine f(x) appartiene a I(L).

Limite destro e sinistro

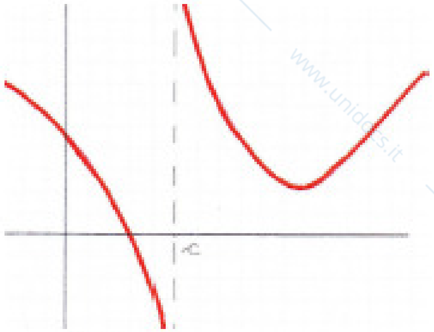
Quando $c \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione destro (rispett. sinistro) per A, considerando intorni destri (rispett. sinistri) di c al posto di intorni completi, si ottiene la definizione di *limite destro* (rispett. *sinistro*).

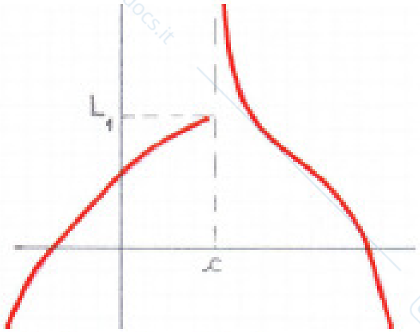
In tal caso si scrive:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \qquad \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

OSSERVAZIONE - Se c è un punto di accumulazione sia destro che sinistro, il limite per $x \to c$ esiste se e solo se esistono il limite per $x \to c^+$ e per $x \to c^-$ e tali limiti sono uguali.

Esempi



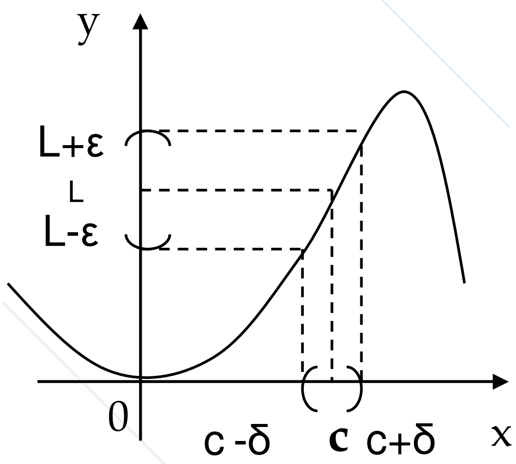


Negli esempi in figura sono rappresentati grafici di funzioni che ammettono limite destro e limite sinistro diversi tra loro per $x \to c$. Nel caso della funzione a sinistra il limite sinistro è $-\infty$, mentre il limite destro è $+\infty$. Nel caso della funzione a destra il limite sinistro è L_1, mentre il limite destro è $+\infty$.

Definizione di limite

Definizione - CASO: $c, L \in R$:

$f : A \subseteq R \to R$, c p.to di accu. per A, f ammette L come limite destro (sinistro) al tendere di x a c se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \mathrm{I}(c, c+\delta)$ $(\mathrm{I}(c-\delta, c))$ t.c. $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{I} : |\mathrm{f(x)} - \mathrm{L}| < \varepsilon$



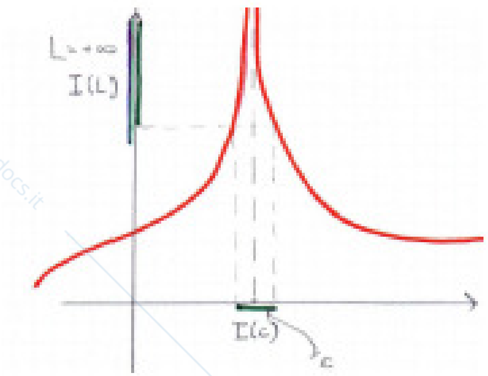
$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \qquad \left(\lim_{x \to c^-} f(x) = L \right)$$

Definizione di limite e asintoto verticale

Definizione - CASO: $c \in R, L = +\infty$:

$f : A \subseteq R \to R$, c p.to di accu. per A, f ammette $+\infty$ come limite destro (sinistro) al tendere di x a c se $\forall M > 0$ $\exists\, \mathrm{I}(c, c+\delta)$ $(\mathrm{I}(c-\delta, c))$ t.c. $\forall x \in \mathrm{I} : f(x) > M$

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty \qquad \left(\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty \right)$$



Esercizio: Dare la definizione di limite nel caso :

$c \in R, L = -\infty$

e fornire un grafico coerente.

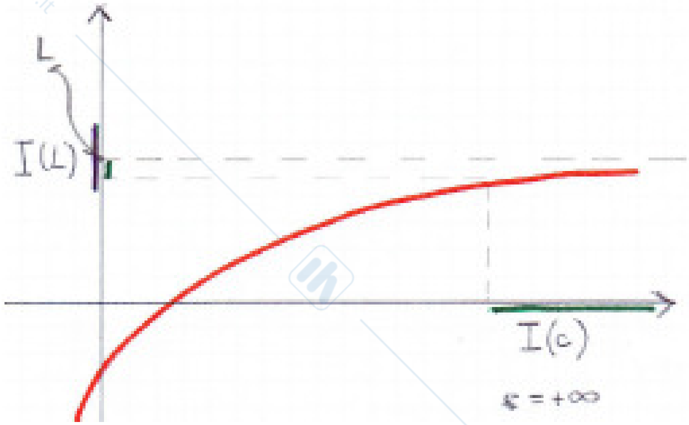
$\Rightarrow$ Nei casi precedenti

il grafico di f ammette x=c come asintoto verticale

Definizione di asintoto orizzontale

Definizione - CASO: $c = +\infty, L \in R$:

$f : A \subseteq R \to R$, A illimitato sup. ,
f ammette limite finito L al tendere di
x a $+\infty$, se $\forall \varepsilon > 0, \exists H > 0$ t.c.
$\forall x > H$, si ha : $|f(x) - L| < \varepsilon$



$I(c) = (H, +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Esercizio: Dare la definizione di limite nel caso $c = -\infty, L \in R$:
e fornire un grafico coerente

Def: Se vale $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ con $L \in R$

$\Rightarrow$ il grafico di f ammette y=L come asintoto orizzontale

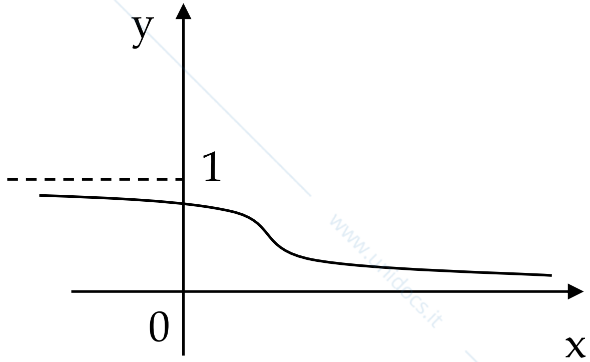
Definizione di limite per eccesso e per difetto

⇨ Def. di limite per difetto o per eccesso

Esempio:

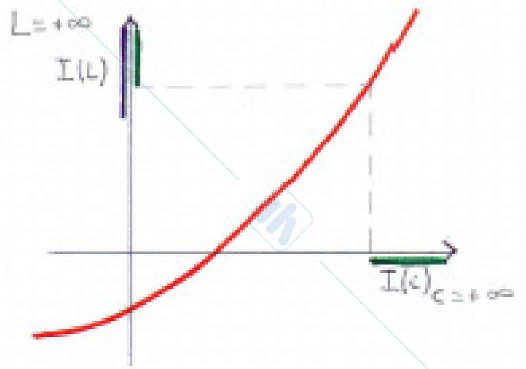
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1^-$$



Definizione di limite

Definizione - CASO: $c = +\infty , L = +\infty$:



$f : A \subseteq R \rightarrow R$, A illimitato sup. ,

f ammette limite $+\infty$ al tendere di x a $+\infty$

se $\forall M > 0 , \exists \text{ H} > 0$ t.c.

$\forall \text{x} > \text{H}$ si ha : $\text{f(x)} > \text{M}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Esercizio: Dare la definizione di limite nei casi :

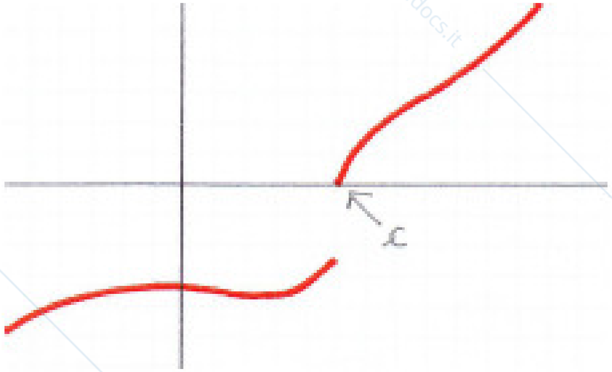
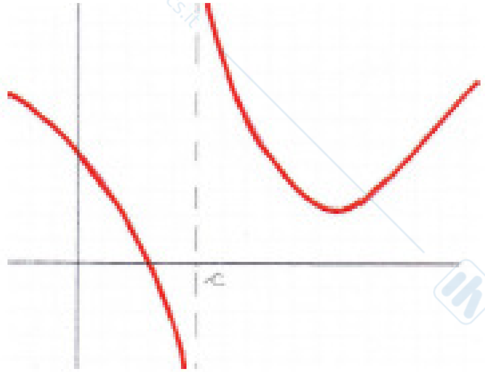
$c = +\infty , L = -\infty$

$c = -\infty , L = +\infty$

$c = -\infty , L = -\infty$

e fornire un grafico coerente.

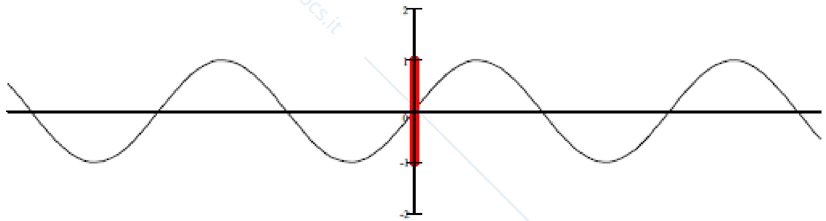
Esistenza del limite

Negli esempi in figura sono rappresentati grafici di funzioni che non ammettono limite per $x \to c$.

Un esempio di funzione che non ammette limite per $x \to \infty$ è la funzione $y = sin(x)$.

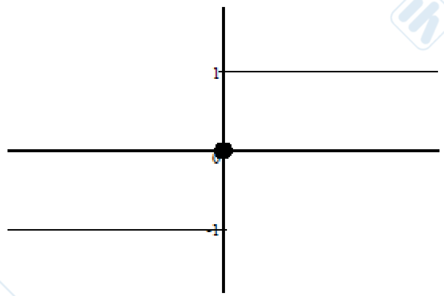
$$\lim_{x \to +\infty} senx$$



Es.

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} \; x$$

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 \text{ se } x < 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \\ 1 \text{ se } x > 0 \end{cases}$$



Teoremi fondamentali

Teorema di unicità del limite:

Se $\exists \lim_{x \to c} f(x) = L \Rightarrow$ L è unico

Teorema della permanenza del segno:

Se $\exists \lim_{x \to c} f(x) = L \neq 0 \Rightarrow \exists\, \mathrm{I}(c)$ dove f ha lo stesso segno del limite L

Teorema di esistenza del limite per funzioni monotone:

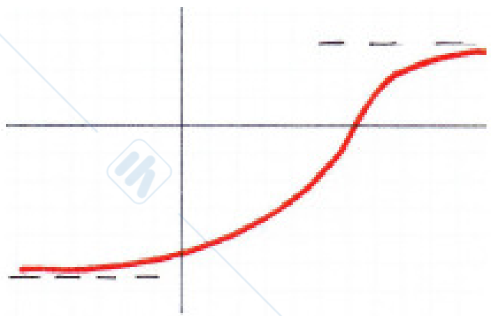
Le funzioni monotone definite su un intervallo ammettono limite agli estremi dell'intervallo

Se f(x) crescente in $I = (a,b)$, si ha :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = Inf\,\{f(x)\} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = Sup\,\{f(x)\}$$

Se f(x) decrescente in $I = (a,b)$, si ha :

$$\lim_{x \to} f(x) = Sup\,\{f(x)\} \quad \text{e} \quad \lim f(x) = Inf\,\{f(x)\}$$

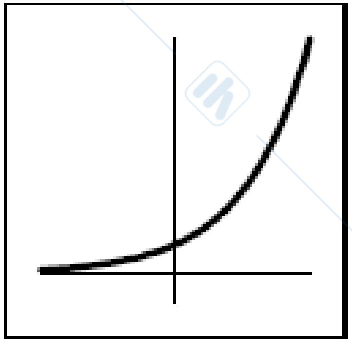


OSSERVAZIONE - Il risultato scritto sopra continua a valere anche quando $a = -\infty$ oppure $b = +\infty$.

Osservazione

Posso calcolare il limite agli estremi del dominio di alcune delle funzioni elementari usando il teorema per funzioni monotone:

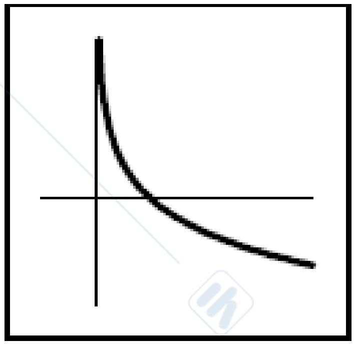
Esempi:



$f(x) = a^x$, con $a > 1$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$



$\log_a x$, $0 < a < 1$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$

Teorema del confronto:

1. Se $f(x) \leq h(x)$ in un I(c) allora :

se $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to c} h(x) = +\infty$

Se $\lim\limits_{x \to c} h(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$

2. Siano f, g e h tre funzioni e c p.to di accu. per i loro insiemi di def. Se

1) $\exists$ I(c) t.c. $\forall x \in I, x \neq c \qquad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

2) $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = L$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

Osservazione:

Se $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$ e *g(x)* è limitata in I(c) allora :

$\lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = 0$

Osservazione: Questo teorema può essere usato per il calcolo di limiti

Esercizio Mostrare che: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{senx}{x} = 0$ e che $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^x \cdot \cos x = 0$

Definizione di continuità

Definizione:

$f : A \subseteq R \to R,\ x_0 \in A \cap A',$ f si dice continua in x_0 se $\exists$ finito il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

e tale limite vale $f(x_0)$.

ovvero f continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Definizione:

f si dice continua in un insieme A se è continua in ogni $x \in A$

Osservazione:

Dalla definizione segue che: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Osservazione:

Vale la seguente importante proprietà: ogni funzione elementare è continua nel suo campo d'esistenza ⇒ il calcolo del limite nel campo di esistenza è immediato

Esempi:

$$\lim_{x \to 3} 2^x = 2^3 = 8$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos(0) = 1$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Limiti e continuità

Teoremi

Siano $f, g : A \subseteq R \to R$, continue in x_0

$\Rightarrow f + g, f \cdot g, \dfrac{f}{g} (g(x_0) \neq 0)$ sono continue.

Se f continua in x_0 e g continua in $f(x_0)$

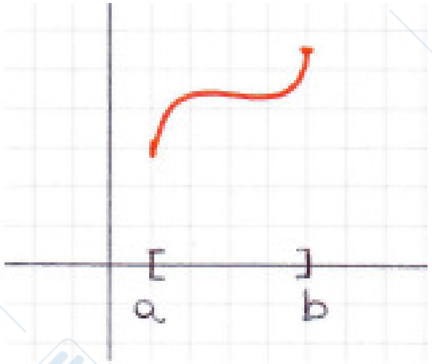
$\Rightarrow gof(x)$ continua in x_0.

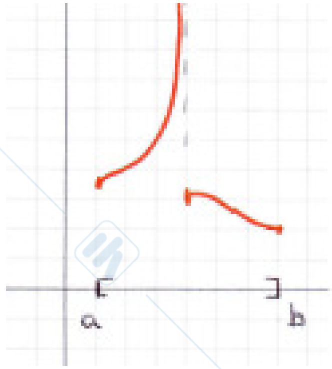
Sia f invert. e continua in x_0

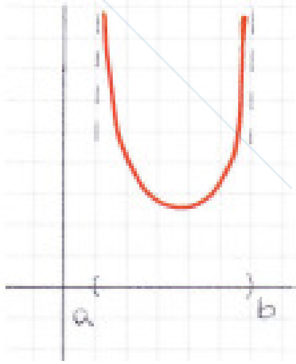
$\Rightarrow f^{-1}$ continua in $f(x_0)$.

Continuità: alcuni teoremi

TEOREMA - Se f è continua in un intervallo $[a, b]$, allora è limitata.

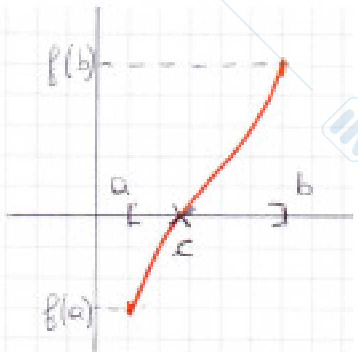






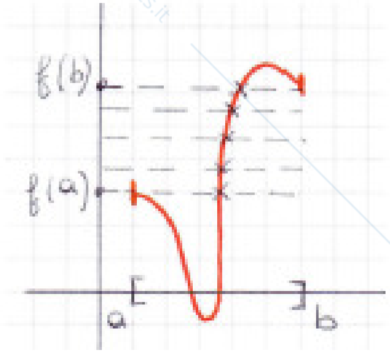
La seconda e la terza delle figure di sopra mostrano come in generale il teorema sulla limitatezza non vale se cade l'ipotesi di continuità o l'ipotesi che l'insieme di definizione sia del tipo $[a, b]$.

TEOREMA (degli zeri) - Se f è continua in un intervallo $[a, b]$, e $f(a)f(b) < 0$ (cioè $f(a)$ e $f(b)$ sono discordi), allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.



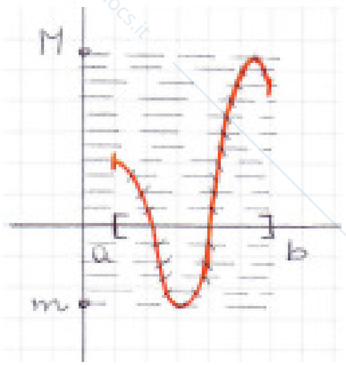
Continuità: alcuni teoremi

TEOREMA (di Darboux) - Se f è continua in un intervallo $[a, b]$, allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.



TEOREMA (di Weierstrass) - Se f è continua in un intervallo $[a, b]$, allora f ammette massimo e minimo assoluti.

I due teoremi di Darboux e di Weierstrass dicono che se f è continua in $[a, b]$, allora f assume tutti i valori compresi tra i proprio massimo assoluto e il proprio minimo assoluto.

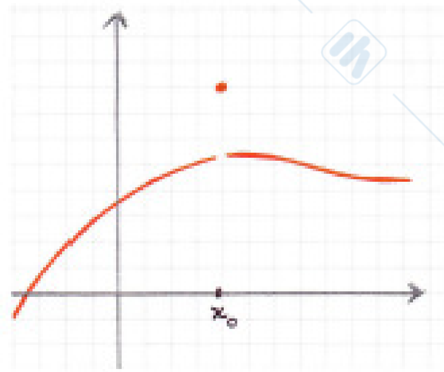


Punti di discontinuità

Un punto di discontinuità di f è un punto x_0 in cui f è definita, ma non è continua.

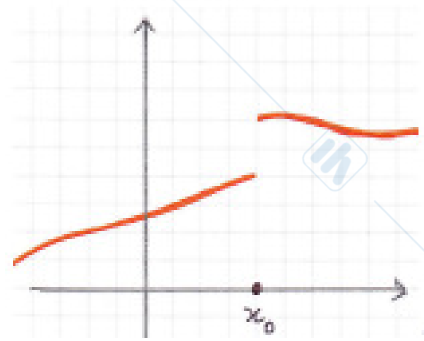
Discontinuità eliminabile

limiti da destra e da sinistra esistono, sono uguali, ma non coincidono con il valore della funzione nel punto.



Discontinuità 1 specie

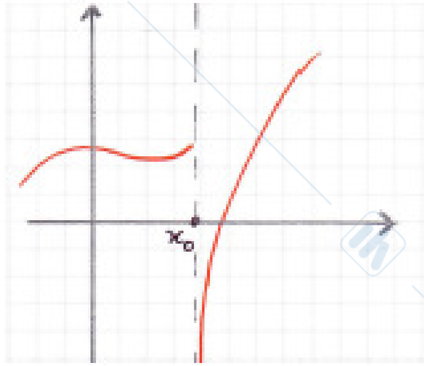
$$x_0 \in A, \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$



Punti di discontinuità

Discontinuità 2 specie

almeno uno dei due limiti destro e sinistro non esiste o è infinito.



ESERCIZI

1. Riconoscere le (eventuali) discontinuità di f e disegnare grafico di f:

$$f(x) = \begin{cases} log(\text{-x}) & \text{se } x < 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ -x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

2. Determinare se esistono, i valori dei parametri a e b per cui la funzione f sia continua in R

$$f(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2} - a & \text{se } x \leq 0 \\ bx^2 - bx & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ -\log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Operazioni con i limiti

Limite di una somma di funzioni:

Siano $f, g : A \subseteq R \to R, x_0 \in A'$. Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ e $\exists \lim_{x \to x_0} g(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Esempi: Se i limiti sono numeri reali, il limite della somma è la somma dei limiti

$$\lim_{x \to 2} \underset{\substack{\downarrow \\ 4}}{x^2} + \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\log_2 x} = 5 \qquad \lim_{x \to \pi} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\sin x} + \underset{\substack{\downarrow \\ -1}}{\cos x} = -1$$

Limite di un prodotto di funzioni:

Siano $f, g : A \subseteq R \to R, x_0 \in A'$. Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ e $\exists \lim_{x \to x_0} g(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Esempi: Se i limiti sono numeri reali, il limite della somma è la somma dei limiti

$$\lim_{x \to 1} [x^3 \cdot 2^x] = \lim_{x \to 1} x^3 \cdot \lim_{x \to 1} 2^x = 1^3 \cdot 2^1 = 2 \qquad \lim_{x \to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\cos x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 3}}{(x^3 + 3)} = 3$$

Operazioni con i limiti

Limite di un quoziente di funzioni:

Siano $f, g : A \subseteq R \to R, x_0 \in A'$.
Se i limiti sono numeri reali e il limite del divisore è $\neq 0$,
il limite del quoziente è il quoziente dei limiti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

Esempi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overset{\displaystyle 3}{\overset{\uparrow}{e^x - x + 2}}}{\underset{\displaystyle 4}{\underset{\downarrow}{\cos x + 3}}} = \frac{3}{4} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{\overset{\displaystyle 3\cdot 4-7}{\overset{\uparrow}{3x^2 - 7}}}{\underset{\displaystyle 1+9}{\underset{\downarrow}{\log_2 x + 3^x}}} = \frac{3\cdot 4 - 7}{1+9} = \frac{1}{2}$$

Operazioni con i limiti

In alcuni casi i risultati relativi al limite di somma prodotto e quoziente, si estendono anche a funzioni f e g divergenti.

Valgono, con ovvio significato di simboli, le seguenti "regole di calcolo"

SOMMA

$(+\infty) + k = (+\infty); \quad (-\infty) + k = (-\infty), \forall k \in \mathbb{R}.$

$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty); \quad (-\infty) + (-\infty) = (-\infty).$

PRODOTTO

$(+\infty) \cdot k = (+\infty) \quad \text{se } k > 0; \quad (+\infty) \cdot k = (-\infty) \quad \text{se } k < 0;$

$(-\infty) \cdot k = (-\infty) \quad \text{se } k > 0; \quad (-\infty) \cdot k = (+\infty) \quad \text{se } k < 0.$

$(+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty); \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = (+\infty) \quad (-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty).$

QUOZIENTE

$\frac{+\infty}{k} = +\infty \quad \text{se } k > 0; \quad \frac{+\infty}{k} = -\infty \quad \text{se } k < 0.$

$\frac{-\infty}{k} = -\infty \quad \text{se } k > 0; \quad \frac{-\infty}{k} = +\infty \quad \text{se } k < 0.$

$\frac{k}{+\infty} = 0; \quad \frac{k}{-\infty} = 0.$

Operazioni con i limiti

Nel caso del quoziente, quando il denominatore tende a zero, se non ci sono dubbi sul segno del risultato, si possono usare le ulteriori due "regole di calcolo":

$$\frac{k}{0} = \text{"} +\infty \text{ oppure } -\infty\text{" se } k \neq 0;$$

e

$$\frac{\pm\infty}{0} = \text{"} +\infty \text{ oppure } -\infty\text{"}$$

Ad esempio:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x-1}{(x-3)^2} = +\infty,$$

poiché

$$\lim_{x\to 3} 2x - 1 = 5 > 0, \quad \lim_{x\to 3} (x-3)^2 = 0,$$

La funzione al denominatore in un intorno di 3 si mantiene sempre ≥0 (il denominatore tende a 0^+).

Operazioni con i limiti

Invece, ad esempio:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x-1}{x-3}$$

non esiste, poiché

$$\lim_{x\to 3} 2x - 1 = 5 > 0, \quad \lim_{x\to 3} x - 3 = 0,$$

ma questa volta la funzione al denominatore cambia segno in un intorno di 3.

Si può invece calcolare:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x-1}{x-3} = +\infty$$

(il limite del numeratore è positivo ed il denominatore tende a 0^+ in quanto si mantiene positivo in un intorno destro di 3) e

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x-1}{x-3} = -\infty$$

(il limite del numeratore è positivo ed il denominatore tende a 0^- in quanto si mantiene negativo in un intorno sinistro di 3.)

Operazioni con i limiti

Limite di una funzione composta:

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = Q$ e $\lim_{t \to Q} g(t) = L$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L$

Esempi:

1) $\lim_{x \to 0^+} \log(senx) = -\infty$

per $x \to 0^+$ $senx \to 0^+ \Rightarrow \log(senx) \to -\infty$

2) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$

per $x \to +\infty$ $\frac{1}{x} \to 0^+ \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \to 1$

Osservazione:

Siano $f, g : A \subseteq R \to R, x_0 \in A'$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

➡ 1^{∞} 0^0 ∞^0

➡ Può essere utile, se f(x)>0 usare la formula: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}$

Operazioni con i limiti

Esercizio

Utilizzare le regole per calcolare:

1) $\lim_{x \to -\infty} x^3 \cdot e^{-x}$

2) $\lim_{x \to +\infty} x^3 + 2^x + 4$

3) $\lim_{x \to -\infty} x^2 + 7^{-x}$

4) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x^2 + 2^x}$

5) $\lim_{x \to -4^+} \frac{x^2}{x + 4}$

6) $\lim_{x \to -4^-} \frac{x^2}{x + 4}$

7) $\lim_{x \to 2} \frac{x - 1}{(x - 2)^2}$

8) $\lim_{x \to -\infty} \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{x^2 - 1}{4^x + 2} \right)$

9) $\lim_{x \to 1^+} \sqrt[3]{\frac{1}{1 - x^2}}$

Forme di indecisione

Sono forme di indecisione le espressioni: $+\infty-\infty \qquad \pm\infty\cdot 0 \qquad \dfrac{0}{0} \qquad \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Ad esempio:

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(\underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{x^2} + \underset{\substack{\downarrow\\ -\infty}}{(-2-x^2)}\Big) = \lim_{x\to+\infty} -2 = -2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(\underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{x^2} + \underset{\substack{\downarrow\\ -\infty}}{(-x)}\Big) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(\underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{x^2} + \underset{\substack{\downarrow\\ -\infty}}{(-x^3)}\Big) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{1}{x}-1\right) = -\infty$$

Forma di indecisione $+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{e^{-x}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{e^{x+2}}\Big) = \lim_{x\to+\infty} e^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{x^{-2}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ -\infty}}{(x^3+2)} = \lim_{x\to-\infty} x + 2x^{-2} = -\infty$$

Forma di indecisione $\pm\infty\cdot 0$

Infiniti e infinitesimi

Definizione

Una funzione si dice infinito per x $\to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Definizione

Date le funzioni f e g, infiniti per x $\to x_0$, f è infinito di ordine $a \in R$ rispetto a g assunto come infinito campione quando :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^a} = k \neq 0$$

Esempio:

1) Se g(x) = x, la funzione f(x) = x^3 è un infinito di ordine 3 per x $\to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(x)^3} = 1$$

Infiniti e infinitesimi

Esempio

Verificare che la funzione $f(x) = x\sqrt{x} + 3$ è un infinito di ordine $\frac{3}{2}$ per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 3}{(x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(x)^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{3}{(x)^{\frac{3}{2}}}\right)}{(x)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

Osservazione:

Posso sempre associare ad una funzione polinomiale un numero che ne esprime l'ordine di infinito, non posso farlo ad esempio per logx o e^x posso però confrontarle.

Confronto di infiniti

Date le funzioni f e g, infiniti per $x \to x_0$, fare il confronto tra infiniti vuol dire calcolare (se $\exists$) il limite di un loro rapporto e dal risultato dedurre se uno prevale sull' altro o se si equivalgono.

Definizione

Siano f e g infinite per $x \to x_0$

Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, f si dice infinito di ordine inferiore a g per $x \to x_0$ e g infinito di ordine superiore a f per $x \to x_0$.

Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, f e g si dicono invece infiniti dello stesso ordine per $x \to x_0$.

Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, f si dice infinito di ordine superiore a g per $x \to x_0$ e g infinito di ordine inferiore a f per $x \to x_0$.

Confronto di infiniti

Teorema

Siano $y = f(x) + F(x)$ con F infinita di ordine superiore a f e $y = g(x) + G(x)$ con G infinita di ordine superiore a g per $x \to x_0$.

Allora :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{G(x)}$$

Osservazione: Utile per risolvere le F.I. $+\infty - \infty$ $\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Esempi:

1) $$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x^3 = [\infty - \infty] \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x^2 - x^3 \underset{\text{conf.di infiniti}}{=} \lim_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$$

2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + x}{x + 3x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + x}{x + 3x^2} \underset{\text{conf.di infiniti}}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{3x^2}\right) = 0$$

Gerarchie di infiniti

Si può dimostrare che:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty \qquad \forall a > 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{(\log x)^b} = +\infty \qquad \forall a, b > 0$$

$$\Rightarrow \log x, \ldots, \log_2 x \ldots, \sqrt[3]{x}, \ldots, \sqrt{x}, \ldots, x^2, \ldots, x^3, \ldots, 2^x, \ldots, e^x, \ldots, 3^x, \ldots, x^x$$

Esempio:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \log^2 x}{e^x + \log x} \underset{\text{conf.di infiniti}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} \underset{\text{conf.di infiniti}}{=} 0$$

Infiniti e infinitesimi

Definizione

Una funzione si dice infinitesima per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Definizione

Date le funzioni f e g, infinitesime per $x \to x_0$, f è infinitesimo di ordine $a \in R$ rispetto a g assunto come infinitesimo campione quando :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^a} = k \neq 0$$

Esempi:

1) Se $g(x) = x$, la funzione $f(x) = 2x^4 + 3x^3$ è un infinitesimo di ordine 3 per $x \to 0$

2) $f(x) = x\sqrt{x} + x$ è un infinitesimo di ordine 1 per $x \to 0$

Confronto di infinitesimi

Definizione

Siano f e g infinitesime per $x \to x_0$

Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, f si dice infinitesimo di ordine superiore a g per $x \to x_0$ e g infinitesimo di ordine inferiore a f per $x \to x_0$.

Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, f e g si dicono invece infinitesime dello stesso ordine per $x \to x_0$.

Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, f si dice infinitesimo di ordine inferiore a g per $x \to x_0$ e g infinitesimo di ordine superiore a f per $x \to x_0$.

Confronto di infinitesimi

Teorema

Siano $y = f(x) + F(x)$ con F infinitesimo di ordine superiore a f e $y = g(x) + G(x)$ con G infinitesimo di ordine superiore a g per $x \to x_0$.

Allora :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Osservazione: Utile per risolvere le F.I. $\frac{0}{0}$

Esempi:

1) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - x^2}{x^4 + 2x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - x^2}{x^4 + 2x^2} \underset{\text{conf.di infinites.}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

2) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x + x^4}{\sqrt{x} - x} = \left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow \underset{\text{conf.di infinites.}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{\sqrt{x}} = 0$$

Confronto di infiniti e infinitesimi
Esercizi

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{4^{x+1} - 3 + x^2}{x^7 + 4^x}$

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x - 5^x}{3^x + 1}$

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x^3 + 1) - 2x}{e^x + x^7}$

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4} + \log(x^2 + 3)}{3^{-x} + \sqrt{x^5} + 2}$

5) $\lim_{x \to +\infty} \log\left(\sqrt{\frac{2x - 1}{3 + 2x}}\right)$

6) $\lim_{x \to 0^-} \frac{3x^2 + 1}{x^4 + x}$

7) $\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$

8) $\lim_{x \to 2^-} \frac{x - x^2}{x^2 - 4}$

Notazioni o-piccolo e asintotico

Definizione

Una funzione f si dice asintotica di g per $x \to x_0$

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e si denota con $f \sim g$ per $x \to x_0$.

Osservazione:

Se $f \sim g$ per $x \to x_0$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$

Definizione

Una funzione f si dice o - piccolo di g (trascurabile rispetto a g) per $x \to x_0$

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e si denota con $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$.

Osservazione:

Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x \to x_0} o(g(x)) + g(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$f(x) + g(x) \sim g(x)$$

Notazioni o-piccolo e asintotico

Esempi:

per $x \to 0^+$ $\quad x^3 = o(x^2)$

per $x \to +\infty$ $\quad x^2 = o(x^3)$

per $x \to 0^+$ $\quad (-2x^{\frac{5}{3}} + x^4 + 3x^2) \sim -2x^{\frac{5}{3}}$,

$(x^4 + 3x^2) = o(x^{\frac{5}{3}})$

per $x \to +\infty$ $\quad (x^5 - 2e^x + 3x - \log 4x) \sim -2e^x$,

$(x^5 + 3x - \log 4x) = o(e^x)$

Utilizzo delle notazioni nel calcolo dei limiti:

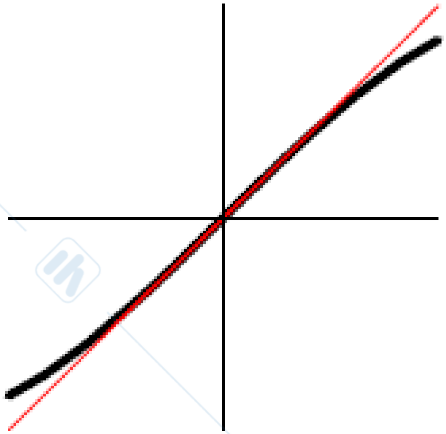
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 2\log x}{3x^5 - 2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + o(e^x)}{-2^x + o(2^x)} = \lim_{x\to+\infty} -\left(\frac{e}{2}\right)^x = -\infty$$

OPPURE

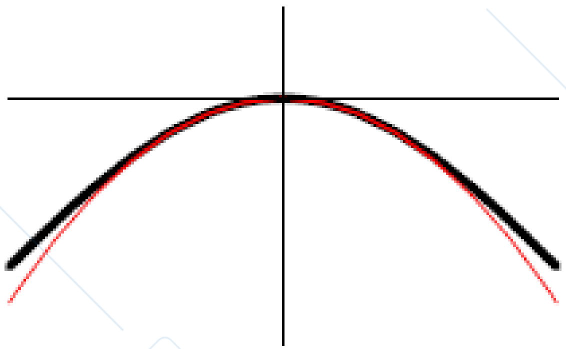
$$\frac{e^x + 2\log x}{3x^5 - 2^x} \sim \frac{e^x}{-2^x} \to -\infty \text{ per } x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 2\log x}{3x^5 - 2^x} = -\infty$$

Comportamento di alcune funzioni elementari per x→0

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$$

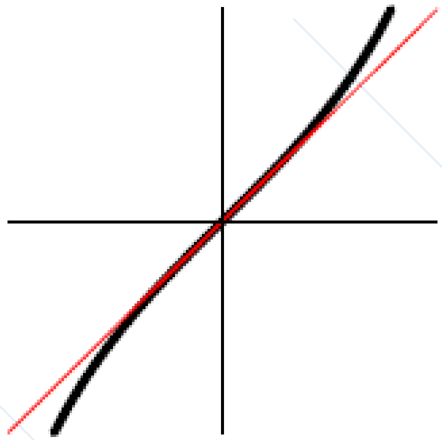


$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

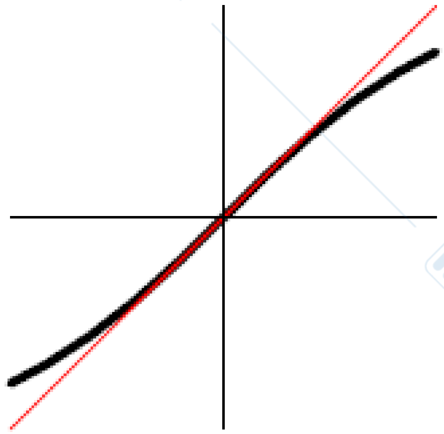


Comportamento di alcune funzioni elementari per x→0

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$



$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

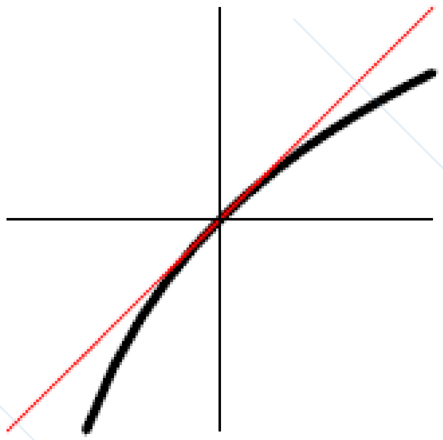


Comportamento di alcune funzioni elementari per x→0

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

da cui

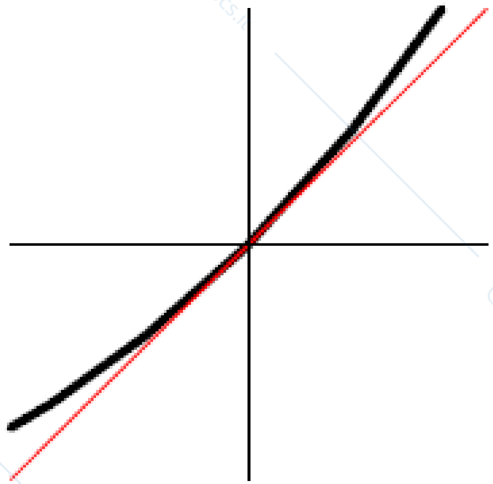
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$$



$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

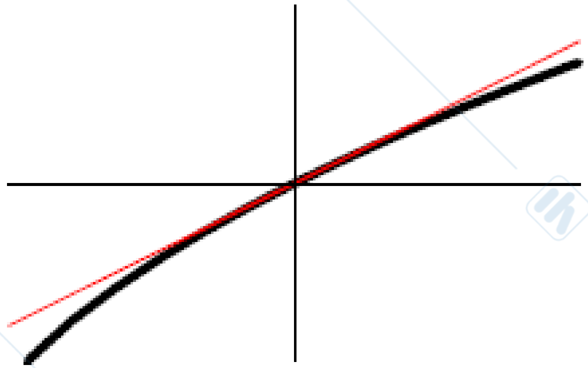
se a = e

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$



Comportamento di alcune funzioni elementari per x→0

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{\alpha x} = 1$$



Gli ultimi 3 limiti notevoli sono dedotti da:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

oppure

$$\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

Equivalente a primo mediante cambio di variabile

$$t = \frac{1}{x}$$

Notazioni o-piccolo e asintotico

Possiamo riscrivere i limiti notevoli precedenti utilizzando la nozione di asintotico, (o quella di trascurabile), esprimendo il comportamento di alcuni infinitesimi per x → 0, in cui compaiono funzioni elementari:

$\sin x \sim x$	$\sin x = x + o(x)$
$\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$	$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
$\tan x \sim x$	$\tan x = x + o(x)$
$\arctan x \sim x$	$\arctan x = x + o(x)$
$\log_a(1+x) \sim \frac{1}{\log a}x$	$\log_a(1+x) = \frac{1}{\log a}x + o(x)$
$\log(1+x) \sim x$	$\log(1+x) = x + o(x)$
$a^x - 1 \sim x \log a$	$a^x - 1 = x \log a + o(x)$
$e^x - 1 \sim x$	$e^x - 1 = x + o(x)$
$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$	$(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x)$

Notazioni o-piccolo e asintotico

Per le regole sul limite di una funzione composta, si deduce che:

per $(\ ) \to 0$	• $\sin(\ ) \sim (\ )$ • $\cos(\ ) - 1 \sim -\frac{1}{2}(\ )^2$ • $\tan(\ ) \sim (\ )$ • $\arctan(\ ) \sim (\ )$ • $\log(1 + (\ )) \sim (\ )$ • $e^{(\ )} - 1 \sim (\ )$ • $(1 + (\ ))^\alpha - 1 \sim \alpha(\ )$

per $(\ ) \to 0$	• $\sin(\ ) = (\ ) + o((\ ))$ • $\cos(\ ) - 1 = -\frac{1}{2}(\ )^2 + o((\ )^2)$ • $\tan(\ ) \sim (\ )$ • $\arctan(\ ) \sim (\ )$ • $\log(1 + (\ )) = (\ ) + o((\ ))$ • $e^{(\ )} - 1 = (\ ) + o((\ ))$ • $(1 + (\ ))^\alpha - 1 = \alpha(\ ) + o((\ ))$

Esempi: 1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x}$$

$$\text{per } x \to 0 \quad x^2 \to 0 \Rightarrow \cos(x^2) - 1 \sim \left(-\frac{1}{2}(x^2)^2\right) = -\frac{1}{2}x^4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^4}{x} = 0$$

Notazioni o-piccolo e asintotico

2)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1+\frac{3}{x})}{sen\,(\frac{1}{x})}$$

per x $\to +\infty$ $\quad \frac{3}{x} \to 0$ e $\frac{1}{x} \to 0 \Rightarrow \log(1+\frac{3}{x}) \sim \frac{3}{x}$ e $sen\,(\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1+\frac{3}{x})}{sen\,(\frac{1}{x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} = 3$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Notazioni o-piccolo e asintotico

Esercizi:

$$1)\ \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{e^{x^3}-1}$$

$$2)\ \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1+x)+x^2}{2x^3 - senx}$$

$$3)\ \lim_{x \to 0^+} \frac{1-\sqrt[4]{1-2x}}{x+\log(1+3x)}$$

$$4)\ \lim_{x \to +\infty} (x^2-3)\log\left(1+\frac{2}{x^2}\right)$$

$$5)\ \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \left(e^{-\frac{2}{x}}-1\right)$$

Forma di indecisione $[0 \cdot \infty]$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = [0 \cdot \infty]$

Osservazione:

con $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \ (o -\infty)$

Posso ricondurmi alle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ mediante

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

oppure mediante opportuni cambi di variabile (usando regole sul limite funzione composta)

Esempio:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} \log(x^{\beta}) = 0 \qquad \alpha > 0$$

LIMITE NOTEVOLE

cambio di variabile $x = t^{-1}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} \log(x^{\beta}) = \lim_{t \to +\infty} t^{-\alpha} \log(t^{-\beta}) = \lim_{t \to +\infty} \frac{-\beta \log t}{t^{\alpha}} = 0$$

Esercizi:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^x \qquad \lim_{x \to -\infty} e^{2x+1} \log(1 + x^2) \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \log(1 + \sqrt{x^3})$$

Asintoto obliquo

Abbiamo già visto quando una funzione ammette un asintoto orizzontale o un asintoto verticale. Se per $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \pm\infty$ (f è divergente), può accadere che f ammetta un asintoto obliquo.

Definizione:

La retta di equazione $y = mx + q \quad (m \neq 0)$

è asintoto obliquo per f per per $x \to +\infty$ (o per $x \to -\infty$)

se $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx - q \right) = 0$ o $\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx - q \right) = 0$

Teorema:

La retta di equazione $y = mx + q \quad (m \neq 0)$

è asintoto obliquo per f per per $x \to +\infty$ (o per $x \to -\infty$)

se e solo se sono soddisfatte contemporaneamente:

1) $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \quad f(x) \sim mx$

2) $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(f(x) - mx \right) = q$

La funzione ha un comportamento di tipo lineare per $x \to \infty$

Asintoto obliquo

Esempio:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 4}{x + 1}$$

ammette asintoto obliquo. Infatti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

(e questo dice che f può ammettere un asintoto obliquo per $x \to +\infty$), inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2(= m)$$

e infine

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x - 4}{x + 1} = -3(= q).$$

L'asintoto pertanto ha equazione $y = 2x - 3$.

Esercizi

Determinare se esistono gli asintoti obliqui delle seguenti funzioni:

$$1)\ f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$$

$$2)\ f(x) = \frac{x^3-\sqrt{x^5}}{x^2+1}$$

$$3)\ f(x) = \frac{x\log x + 2\,senx}{2\log x}$$

Determinare il dominio, il segno, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni. Riportare le informazioni sul piano cartesiano.

$$1)\ f(x) = \frac{x^2+e^x}{x-1}$$

$$2)\ f(x) = \frac{\sqrt{x}+x^4}{x^3-1}$$

$$3)\ f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$