$\mathbb{R}$

$\phi^c = X = \mathbb{R}$ $\quad R^c = X^c = \phi$ $\}$ $\phi, X, \mathbb{R},$ sono aperti e chiusi

$(a, +\infty)$ è aperto $\quad (-\infty, a]$ è chiuso

$(-\infty, a)$ è aperto $\quad [a, +\infty)$ è chiuso

TOPOLOGIA, dato insieme X

$A \subset P(X)$
↓
insieme di parti di X

$\phi, X \in A$

$\underbrace{\cup_{\alpha \in A} O_\alpha}_{\text{unione arbitraria x la cardinalità}} \in A$ per $O_\alpha \in A$

se $O_1, O_2 \in A \to O_1 \cap O_2 \in A$

$A \leftrightarrow I$

$(a,b) \cup (c,d)$ è aperto
$(a,+\infty)$ è aperto
$(-\infty, b)$ è aperto

(a,b) è aperto $= (a,+\infty) \cap (-\infty, b)$

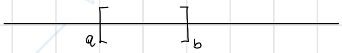
se $X = \mathbb{R}$ la topologia canonica è generata dagli insiemi della forma (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$

se $O \in A$ allora O è unione di intervalli di questo tipo

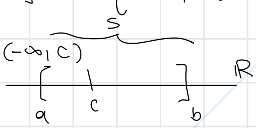
topologia canonica di $S \subset \mathbb{R}$ (sottoinsieme)
$S \subset X$

Gli aperti di S sono quelli della forma $S \cap O$

con O nella topologia di X



$[a,b] = \mathbb{R} \setminus \{(-\infty, a) \cup (\ , +\infty)\}$

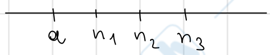


$[a, c)$ è un aperto per $[a,b]$

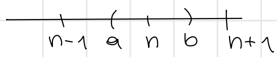
$S = \mathbb{N}$

$O = (a, +\infty)$

$S \cap O = \{n \in \mathbb{N} : n > a\}$



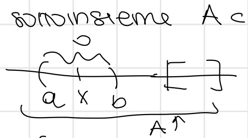
TOPOLOGIA DISCRETA su $\mathbb{N}$ cioè ogni $n \in \mathbb{N}$ costituisce un aperto $\{n\}$



$(a+b) \cap \mathbb{N} = \{n\}$

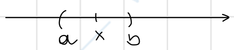
un intorno di $x \in X$ è un sottoinsieme $A \subset X$ tale che esiste $O \in A$

$x \in O \subset A$



diciamo che $(a, +\infty)$ è un intorno (aperto) di $+\infty$

$(-\infty, b)$ " " " " di $-\infty$



$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

$+\infty + \infty = +\infty$

$3 + \infty = +\infty$

$3 - (-\infty) = +\infty$

$3 - (+\infty) = -\infty$

$-\infty + (-\infty) = -\infty$

$+\infty - (+\infty) = ?$

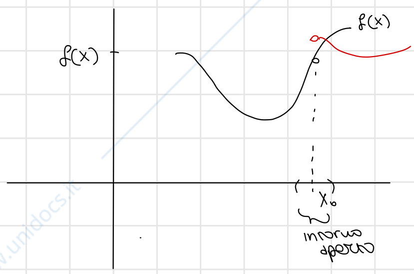
$+\infty + (-\infty) = ?$

Gli aperti di $\overline{\mathbb{R}}$ sono generati da $[-\infty, b), (a, +\infty] \xrightarrow{\cap} (a, b)$

$\{-\infty\} \cup (-\infty, b), \ (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$

$[-\infty, b) \cap \mathbb{R} = (-\infty, b)$

$(a, +\infty] \cap \mathbb{R} = (a, +\infty)$

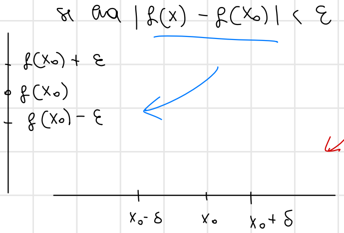


la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua in x_0 se per ogni intorno aperto O di $f(x_0)$ posso trovare intorno aperto U di x_0 tale che $f(U) \subset O$

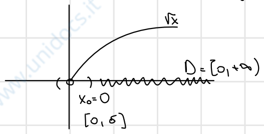
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in x_0

se per ogni $\varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ tale che per ogni x, $|x - x_0| < \delta$, $x \in \Omega$

si ha $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$



la funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ si dice continua in $x_0 \in \Omega$ se per ogni intorno aperto O di $f(x_0)$ posso trovare " " U (nella topologia indotta su Ω) di x_0 tale che $f(U) \subset O$



$[0, \delta) = (-\delta, \delta) \cap \overbrace{[0, +\infty)}^{\Omega}$

Dimostrare che $f(x)=\sqrt{x}$ è continua in $x_0=0$

voglio ottenere $|\sqrt{x}-\sqrt{0}|<\varepsilon$

$x<\varepsilon^2$

con $\delta=\varepsilon^2$ ho che x che soddisfi $|x-0|<\delta$, $x>0$

soddisfa $|\sqrt{x}|<\varepsilon$

LIMITE

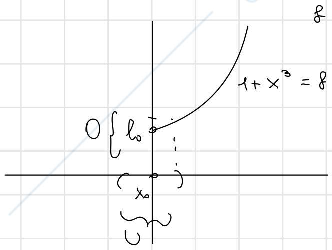
sia $f: D\to\mathbb{R}$, x_0 non necessariamente appartenente a D,

diciamo che il limite per x che tende a x_0 (scritto $x\to x_0$) di f è $l\in\overline{\mathbb{R}}$

se per ogni intorno aperto di l (O di l) esiste intorno U di x_0

tale che $f(D\cap U)\subset O$ $\quad(\lim_{x\to x_0} f(x)=l)$

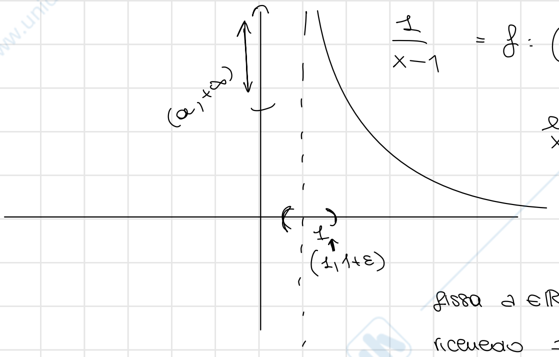
$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$



per una funzione continua

$f: D\to\mathbb{R}$ se $x_0\in D$

posso scrivere $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$



$\frac{1}{x-1}=f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$

$\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$

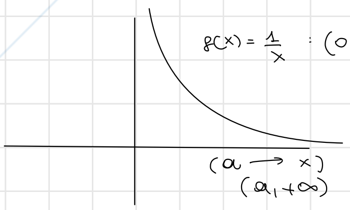
dimostriamo

fisso $a\in\mathbb{R}$, $a>0$

richiedo $\frac{1}{x-1}>a \to 1>a(x-1)$

$\frac{1}{a}>x-1 \to x<1+\frac{1}{a}$

scelgo $\varepsilon=\frac{1}{a}$



$f(x)=\frac{1}{x}:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

richiedo $|f(x)|<\varepsilon$

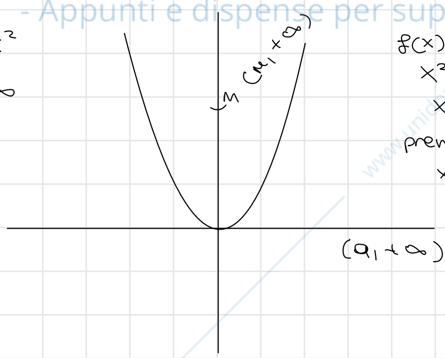
$|\frac{1}{x}|<\varepsilon$

$\frac{1}{x}<\varepsilon$

$x>\frac{1}{\varepsilon}=a$

sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$



$f(x) > M$

$x^2 > M$

$x > \sqrt{M}$

prendo $a = \sqrt{M}$

$x > a \Rightarrow f(x) > M$