Quiz 2. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) La forma quadratica

$$q(x, y, z) = (x, y, z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

è indefinita.

b) Non esistono $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ non nulli e tali che

$$q(x, y, z) = (x, y, z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

c) 1 non è radice del polinomio caratteristico $p_A(t)$ di A.

d) $172/(34 + 11i)$ è radice del polinomio caratteristico $p_A(t)$ di A.

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Per verificarlo calcoliamo la segnatura di q (o il segno degli autovalori di q, che è la stessa cosa per il teorema di Sylvester). Procediamo in due modi diversi. Come primo metodo procediamo con operazioni elementari su righe e colonne da A.

$$A \xrightarrow{C_2 \to C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - 3C_1/2}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1/2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - C_2/2}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2/2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In particolare osserviamo che A è definita positiva per il teorema di Sylvester.

Come secondo metodo applichiamo la regola di Cartesio. Per fare ciò calcoliamo il polinomio caratteristico di A. Si ha

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 2 & 3 \\ 2 & 4-t & 4 \\ 3 & 4 & 6-t \end{vmatrix} = -t^3 + 12t^2 - 15t + 4$$

Chiaramente $t = 0$ non è radice di $p_A(t)$. Poiché la sequenza $(-1, 12, -15, 4)$ presenta tre variazioni di segno segue che le tre radici di $p_A(t)$ sono positive: concludiamo che q è definita positiva.

L'affermazione b) è vera. Infatti, come abbiamo già visto,q è definita positiva, sicché $q(x, y, z) > 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ non nullo: d'altra parte è evidente che $q(0, 0, 0) = 0$.

L'affermazione c) è falsa. Infatti

$$p_A(1) = \det(A - I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

L'affermazione d) è falsa. Infatti $172/(34+11i) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (come è facile verificare). Inoltre è noto dalla teoria che le radici del polinomio caratteristico di una matrice simmetrica a coefficienti reali sono tutti numeri reali.