Esercizio 2. Verificare che

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e calcolare tutte le matrici diagonali simili ad A, precisando, per ciascuna di esse, una matrice P che diagonalizza.

Svolgimento. Per verificare che A è diagonalizzabile è sufficiente calcolare gli autovalori di A ed i relativi autospazi. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & 1 \\ 0 & t+2 & 0 \\ 0 & 0 & t+2 \end{vmatrix} = (t-2)(t+2)^2,$$

da cui si ricava che gli autovalori sono $t_1 = 2$, $m_a(2) = 1$, e $t_2 = t_3 = -2$, $m_a(-2) = 2$ (si poteva procedere anche in maniera alternativa osservano che A è triangolare).

Per calcolare gli autospazi risolviamo i sistemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il primo sistema equivale a

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

sicché l'autospazio di 2 è $E_A(2) = \mathcal{L}((1,0,0))$. Il secondo sistema è equivalente a

$$-4x + y + z = 0$$

sicché l'autospazio di -2 è $E_A(-2) = \mathcal{L}((1,4,0),(1,0,4))$. Quindi $\mathcal{B} := ((1,0,0),(1,4,0),(1,0,4))$ è base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A, perciò A è diagonalizzabile.

Rispetto a $\mathcal{B}$ la matrice diagonale simile ad A e una matrice P che diagonalizza sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ogni matrice diagonale simile ad A ha sulla diagonale gli autovalori di A. Per questo motivo possiamo elencare tutte le matrici diagonli simili ad A indicando, a fianco di ciascuna di esse, una matrice che diagonalizza oltre a quelle indicate sopra:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$