Esami scritti di Analisi Matematica I 2015 - 2016

1 Esame del 28 gennaio 2016 - I^o turno

Esercizio 1. Sia data la funzione:

$$f(x) = \arcsin|1-2^x| + 1.$$

a) Determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

b) Calcolarne la derivata, individuando gli eventuali punti di non derivabilità, specificandone il tipo.

c) Determinarne gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo, specificandone il tipo.

d) Rappresentarne il grafico.

e) Dire se esiste un prolungamento di f su $\mathbb{R}$ che sia derivabile in $x = 1$, motivando la risposta.

Esercizio 2.

a) Scrivere la definizione di funzione strettamente crescente su $A \subseteq \mathbb{R}$.

b) Siano date due funzioni f e g definite su $\mathbb{R}$. Se f è continua su $[a, b]$ e g è crescente su $\mathbb{R}$, dimostrare che $g \circ f$ ha massimo e minimo assoluti (o globali) su $[a, b]$.

c) Dire se la seguente affermazione è vera o falsa. Se è vera, dimostrarla; se è falsa, proporre un controesempio.

Se f è continua su $[a, b]$ e g è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, l'insieme dei punti di massimo e minimo locali (o relativi) di f su $[a, b]$ è uguale all'insieme dei punti di massimo e minimo locali (o relativi) di $g \circ f$ su $[a, b]$.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) Poiché la funzione arcoseno è definita se e solo se l'argomento è compreso fra -1 e 1 inclusi, si ha dom$f = (-\infty, 1]$. Inoltre f è continua su $(-\infty, 1]$ perché composizione di funzioni continue.

Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\arcsin|1-2^x|+1) = \frac{\pi}{2}+1, \quad f(1) = \frac{\pi}{2}+1.$$

Quindi, la retta $y = \frac{\pi}{2}+1$ è un asintoto orizzontale (sinistro) della funzione.

b) Calcoliamo la derivata; riscriviamo prima f specificando i due casi dovuti alla presenza del valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin(1-2^x)+1 & \text{se } x < 0 \\ \\ \arcsin(-1+2^x)+1 & \text{se } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Dunque:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2^x \log 2}{\sqrt{2^x(2-2^x)}} & \text{se } \ x < 0 \\ \\ \dfrac{2^x \log 2}{\sqrt{2^x(2-2^x)}} & \text{se } \ 0 < x < 1. \end{cases}$$

Poiché $\lim_{x\to0^-} f'(x) = -\log 2 \neq \lim_{x\to0^+} f'(x) = \log 2$ se ne conclude che $x = 0$ è un punto di non derivabilità di f e, più precisamente, un punto angoloso per f.

c) Osserviamo che $\quad f'(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 0 \quad$ e $\quad f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x < 1.$

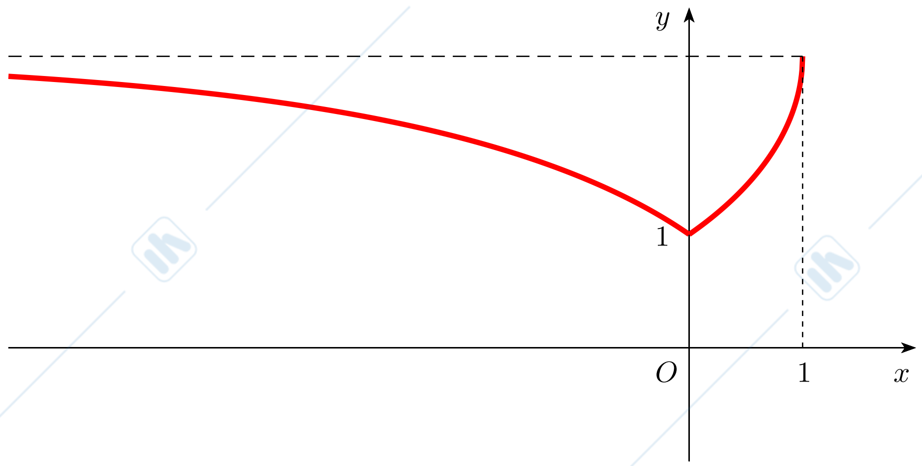
Dunque f decresce strettamente in $(-\infty, 0]$ e cresce strettamente in $[0, 1]$.

I punti di estremo di una funzione continua vanno cercati tra i punti stazionari, gli eventuali punti di non derivabilità della funzione e gli estremi del dominio. Nel nostro caso il punto di non derivabilità $x = 0$ è un punto di minimo assoluto.

La funzione è superiormente limitata: si ha sempre $f(x) \le \frac{\pi}{2}+1$; inoltre $f(1) = \frac{\pi}{2}+1$. Ne concludiamo che $x = 1$, estremo del dominio, è un punto di massimo assoluto.

d) Per disegnare il grafico di f con maggior precisione, osserviamo che $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$.

Di seguito è riportato un grafico qualitativo di f:



e) Indichiamo con g un generico prolungamento di f su $\mathbb{R}$, ottenuto "incollando" una funzione incognita h per $x > 1$:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \leq 1 \\ \\ h(x) & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

La funzione g è continua in $x = 1$ se

$$g(1) = f(1) = \frac{\pi}{2} + 1 = \lim_{x \to 1^+} h(x).$$

Quindi, ad esempio, la funzione costante $h(x) = \dfrac{\pi}{2} + 1$ rende il prolungamnto $g(x)$ continuo su $\mathbb{R}$.

Come già osservato in precedenza

$$\lim_{x \to 1^-} g'(x) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = +\infty.$$

Tale risultato è sufficiente per dire che, qualunque sia la funzione h scelta, la funzione g non potrà mai essere derivabile in $x = 1$.

Esercizio 2.

a) Diciamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) < f(x_2)$.

b) Poiché f è continua su $I = [a, b]$, per il teorema di Weierstrass f ammette massimo M e minimo m in I; dunque, per ogni $x \in I$, si ha $m \leq f(x) \leq M$.
Poiché g è crescente su $\mathbb{R}$, si ha $\forall x \in I$, $g(m) \leq g(f(x)) \leq g(M)$, ovvero $g(m) \leq (g \circ f)(x) \leq g(M)$. Dunque $g(m)$ e $g(M)$ sono rispettivamente minimo e massimo di $g \circ f$ su I.

c) L'enunciato è vero. Per dimostrarlo, sia $I = [a, b]$; consideriamo i due insiemi $A = \{$punti di massimo e minimo locali di f su $I\}$ e $B = \{$punti di massimo e minimo locali di $g \circ f$ su $I\}$
Proviamo che $A \subseteq B$ e che $B \subseteq A$.

$A \subseteq B:$ sia c un punto di minimo locale di f su I; per definizione esiste un intorno $I(c)$ tale che, $\forall x \in I(c) \cap I, \quad f(x) \geq f(c)$.
Poiché g è crescente su $\mathbb{R}$, si avrà $\forall x \in I(c) \cap I, \quad g(f(x)) \geq g(f(c))$; dunque $\forall x \in I(c) \cap I$ si ha $(g \circ f)(x) \geq (g \circ f)(c)$: pertanto c è un punto di minimo locale di $g \circ f$ su I.
In modo analogo si prova che un punto di massimo locale di f su I è anche un punto di massimo locale di $g \circ f$ su I.

$B \subseteq A:$ sia c un punto di minimo locale di $g \circ f$ su I; esiste un intorno $I(c)$ tale che $(g \circ f)(x) \geq (g \circ f)(c)$, e dunque $g(f(x)) \geq g(f(c)), \quad \forall x \in I(c) \cap I$; poiché g strettamente crescente su $\mathbb{R}$, è invertibile, e anche g^{-1} è strettamente crescente, su qualunque intervallo; pertanto $\forall x \in I(c) \cap I, \quad g^{-1}(g(f(x))) \geq g^{-1}(g(f(c)))$ e quindi $f(x) \geq f(c)$; pertanto c è un punto di minimo di f su I.
In modo analogo si prova che un punto di massimo locale di $g \circ f$ su I è anche un punto di massimo locale di f su I.

Osserviamo che l'ipotesi che g sia strettamente monotona su $\mathbb{R}$ è indispensabile; se fosse solo monotona, potremmo trovare facilmente dei controesempi, ad esempio considerando come g una funzione costante.

2 Esame del 28 gennaio 2016 - II^o turno

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)^2}{\log(x+2)} - 3 & x \in (-2,-1) \cup (-1,+\infty) \\ \\ -3 & x \leq -2. \end{cases}$$

a) Studiarne i limiti agli estremi del dominio. Studiare la continuità di f sul suo dominio.

b) Studiare la derivabilità di f e calcolarne la derivata, dove esiste.

c) Determinare gli intervalli di monotonia di f e i suoi punti di massimo e di minimo, specificandone il tipo.

d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

e) Data la funzione

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)^2}{\log(x+2)} - 3 & x \in (-2,-1) \\ \\ -3 + (x+2)^k & x \leq -2, \end{cases}$$

1) determinare i valori di $k \in \mathbb{N}$ per cui f_k è continua in $(-\infty,-1)$;

2) determinare i valori di $k \in \mathbb{N}$ per cui f_k è di classe $\mathcal{C}^1$ in $(-\infty,-1)$.

Esercizio 2.

a) Scrivere la definizione di ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto a $\dfrac{1}{x}$, per $x \to +\infty$.

b) Dimostrare che

$$a_n = \sqrt[7]{4n - \frac{2}{\sqrt{n}\log^3 n}} - \sqrt[7]{4n} = o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

c) Dire se la seguente affermazione è vera o falsa. Se è vera, dimostrarla; se è falsa, proporre un controesempio.

Se a_n è tale che $1 \leq a_n \leq 3$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste ed è un numero reale $l \in [1,3]$.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) La funzione logaritmo è definita se e solo se l'argomento è maggiore di zero. Dunque la funzione $g(x) = \dfrac{(x+2)^2}{\log(x+2)}$ è definita se e solo se $x+2>0$ e $\log(x+2) \neq 0$, cioè se e solo se $x \in (-2,-1) \cup (-1,+\infty)$. Ne segue che $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Poiché $\log(x+2)$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $(x+2)^2$ per $x \to +\infty$, si ha che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3, \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty.$$

Poiché $\dfrac{(x+2)^2}{\log(x+2)}$ è un infinito di ordine superiore a x per $x \to +\infty$, la funzione non ammette asintoto obliquo destro.

La funzione f è continua in $(-\infty,-2)$ perché è una funzione costante, ed è continua in $(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$ perché composizione di funzioni continue,

Inoltre $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -3 = f(-2)$. Quindi f è continua anche in $x = 2$ e quindi è continua in tutto il suo dominio.

b) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)}{\log^2(x+2)}(2\log(x+2)-1) & x > -2\,, x \neq -1 \\ \\ 0 & x < -2. \end{cases}$$

Poiché $\lim\limits_{x\to-2^+} f'(x) = 0$, se ne conclude che f è derivabile in $x=-2$ con $f'(-2) = 0$ e quindi f è derivabile in tutto il suo dominio.

c) Per $x > -2$ si ha

$$f'(x) = \frac{(x+2)}{\log^2(x+2)}(2\log(x+2)-1) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > \sqrt{e}-2$$

mentre

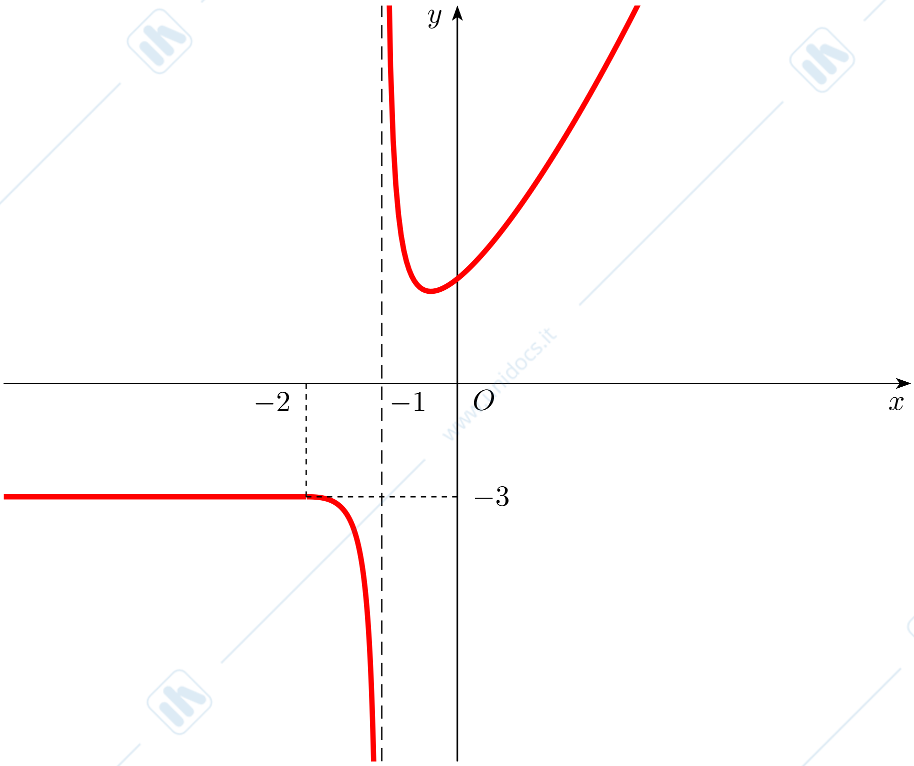
$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq -2 \quad \text{e} \quad x = \sqrt{e}-2.$$

Possiamo concludere che:

- f è decrescente (non strettamente) in $(-\infty,-1)$, f è strettamente decrescente in $[-2,-1)$ e in $(-1,\sqrt{e}-2]$;
- f è crescente (non strettamente) in $(-\infty,-2]$, f è strettamente crescente in $[\sqrt{e}-2,+\infty)$;
- i punti $x < -2$ e $x = \sqrt{e}-2$ sono punti di minimo locale (non assoluto) per f;
- i punti $x \leq -2$ sono anche punti di massimo locale (non assoluto) per f.

Infine, dal punto a), la funzione è inferiormente e superiormente illimitata; ne concludiamo che f non ammette punti di massimo o minimo assoluti.

d) Di seguito è riportato un grafico qualitativo di f.



e) Consideriamo la funzione

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)^2}{\log(x+2)} - 3 & x \in (-2, -1) \\ \\ -3 + (x+2)^k & x \leq -2. \end{cases}$$

1) Si ha $f_0(-2) = -2$ (convenendo, come di consueto, che la funzione $(x - x_0)^0$ sia uguale a 1 anche in $x = x_0$) mentre $f_k(-2) = -3$ per $k \geq 1$. Quindi

$$\lim_{x \to -2^+} f_k(x) = f(-2) = \lim_{x \to -2^-} f_k(x) = -3$$

e la funzione è continua in $x = -2$ se e solo se $k \geq 1$. Altrove la funzione è continua perché composizione di funzioni elementari continue.

2) Per $k \geq 1$ si ha che che $f_k'(x) = k(x+2)^{k-1}$ se $x < -2$. Ricordando il punto b), ne segue facilmente che $\lim_{x \to -2^+} f_k'(x) = 0 = \lim_{x \to -2^-} f_k'(x)$ (e la funzione è derivabile in $x = -2$) se e solo se $k \geq 2$ e $f_k'(-2) = 0$. In particolare, il limite di cui sopra garantisce anche la continuità della derivata in $x = -2$. Siccome altrove la derivata è continua perché composizione di funzioni elementari continue, se ne conclude che f_k è di classe C^1 per ogni $k \geq 2$.

Esercizio 2.

a) Diciamo che f è un infinitesimo di ordine $\alpha > 0$ rispetto a $\dfrac{1}{x}$ per $x \to +\infty$ se esiste $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tale che

$$f(x) \sim k\,\frac{1}{x^\alpha},$$

ovvero se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = k.$$

b) Poiché $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ per $x \to 0$, si ha che

$$a_n = \sqrt[7]{4n}\left[\left(1 - \frac{1}{2n^{3/2}\log^3 n}\right)^{1/7} - 1\right] = \sqrt[7]{4n}\left[-\frac{1}{14n^{3/2}\log^3 n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}\log^3 n}\right)\right]$$

$$= -\frac{\sqrt[7]{4}}{14\,n^{19/14}\log^3 n} + o\left(\frac{1}{n^{19/14}\log^3 n}\right) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Ne segue che

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = a_n n = -\frac{\sqrt[7]{4}}{14\,n^{5/14}\log^3 n} + o\left(\frac{1}{n^{5/14}\log^3 n}\right) = o(1) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

c) L'affermazione è falsa. Si prenda come controesempio $a_n = (-1)^n + 2$ che soddisfa $1 \le a_n \le 3$ ma non ammette limite per $n \to +\infty$.

3 Esame del 28 gennaio 2016 - III^o turno

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{1-|x|} - \arcsin\sqrt{1-|x|} + 2.$$

a) Determinare il dominio di f, e le sue eventuali simmetrie.

b) Studiare la continuità di f nel suo dominio.

c) Calcolare la derivata di f. Determinare i punti di non derivabilità di f, specificandone il tipo.

d) Determinare gli intervalli di monotonia di f e i suoi eventuali punti di massimo e di minimo, specificando se sono locali o assoluti.

e) Tracciarne un grafico qualitativo di f.

f) Stabilire se esistono delle costanti $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \operatorname{dom} f \cap (0,+\infty) \\ \\ ax+b & x \in (0,+\infty) \setminus \operatorname{dom} f \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $(0,+\infty)$.

Esercizio 2.

a) L'affermazione seguente è falsa. Mostrarlo esibendo un controesempio.

Se la funzione $f(x)$ *è definita, strettamente decrescente e strettamente positiva su* $(0,1)$.

Allora $\lim_{x\to 1^-} f(x) > 0$.

b) Dimostrare che l'affermazione seguente è vera.

Se la funzione $f(x)$ *è definita e crescente su* $(0,1]$, *allora* $\lim_{x\to 1^-} f(x) \le f(1)$.

c) Discutere se l'asserto enunciato al punto *b*) rimane vero quando nella tesi si sostituisce "$<$" a "$\le$". Motivare la risposta.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) La funzione $h(x) = \sqrt{1-|x|}$ è definita se e solo se $1 - |x| \geq 0$, cioè se e solo se $x \in [-1, 1]$. Poiché $\sqrt{1-|x|} \in [-1, 1]$ per ogni $x \in [-1, 1]$, e poiché la funzione arcoseno è definita se e solo se il suo argomento è compreso fra -1 e 1 inclusi, ne segue che dom $f = [-1, 1]$.

Osserviamo che per ogni $x \in [-1, 1]$ si ha che $f(-x) = f(x)$. Quindi f è pari.

b) La funzione f è continua nel suo dominio, in quanto composizione di funzioni continue.

c) Poiché f è pari, studiamo la derivata per $x > 0$ della funzione f ristretta a $[0, 1]$. Per ogni $x \in (0, 1)$ si ha che

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{1-(1-x)} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1-x}{2x\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{2x}.$$

Dunque:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 1), \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0.$$

Poiché la funzione f è pari, si ha:

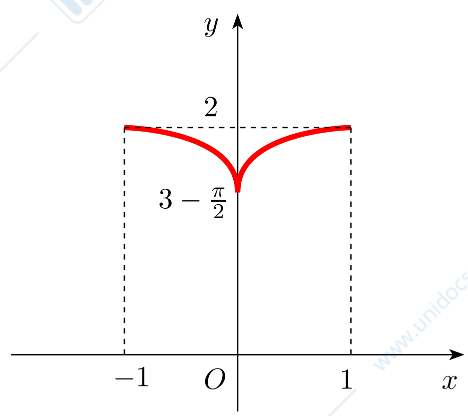
$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-1, 0), \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^+} f'(x) = 0.$$

Dunque il punto $x = 0$ è un punto di cuspide, mentre i punti $x = \pm 1$ sono punti in cui esistono rispettivamente la derivata sinistra e destra e sono entrambe nulle.

d) La funzione f è strettamente crescente su $(0, 1)$; è strettamente decrescente su $(-1, 0)$.

I punti di estremo di una funzione continua vanno cercati tra i punti stazionari, gli eventuali punti di non derivabilità della funzione e gli estremi del dominio. In questo caso la funzione f ha punti di massimo assoluto nei punti di estremo $x = -1$ e in $x = 1$, e ha un punto di minimo assoluto nel punto di cuspide $x = 0$.

e) Di seguito è riportato un grafico qualitativo di f:



f) Poiché $\mathrm{dom}(f) = [-1, 1]$, possiamo riscrivere la definizione del prolungamento di f su $(0, +\infty)$ in questo modo:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, 1] \\ ax + b & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Dunque

$$g'(x) = \begin{cases} f'(x) & x \in (0, 1) \\ a & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

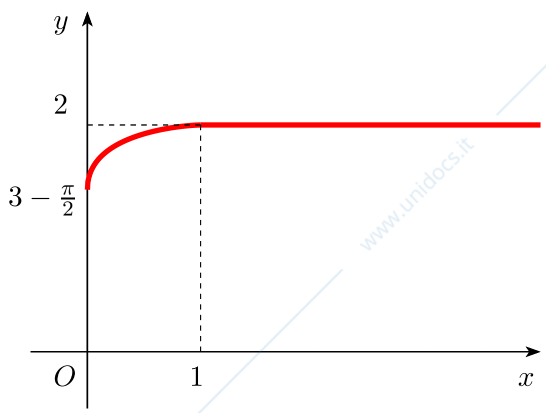
La funzione $g(x)$ è continua e derivabile in $(0, 1)$ e in $(1, +\infty)$, perché lo sono f e la funzione $h(x) = ax + b$. Resta da controllare solo il punto $x = 1$.

La funzione g è continua in $x = 1$ se

$$g(1) = f(1) = 2 = \lim_{x\to 1^+} (ax + b) = a + b,$$

ovvero se $a + b = 2$.

Per quanto riguarda la derivabilità in $x = 1$, poiché $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$, si deve avere $a = 0$. Quindi la funzione g è continua e derivabile in $(0, +\infty)$ se $a = 0$ e $b = 2$. Di seguito è riportato un grafico qualitativo della funzione g:



Esercizio 2.

a) Si consideri, ad esempio, la funzione $f(x) = -\log x$; essa è definita, strettamente decrescente e strettamente positiva su $(0, 1)$. Però $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$.

b) Per il Teorema sui limiti delle funzioni monotone, essendo f definita e crescente su $I = (0, 1]$, allora esiste $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sup_{x\in I} f(x)$.

Poiché f è crescente su $(0, 1]$, risulta che $f(x) \leq f(1)$ per ogni $x \in (0, 1]$. Poiché $\sup_{x\in(0,1]} f(x)$ è il minimo dei maggioranti di $f(x)$ per $x \in (0, 1]$, si ha che $\sup_{x\in(0,1]} f(x) \leq f(1)$.

c) In questo caso la proprietà è falsa. Infatti, per esempio, la funzione $f(x) = x$ è crescente su $(0, 1]$ e

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sup_{x \in (0,1]} f(x) = f(1) = 1.$$

Vale in generale per qualunque funzione f crescente su $(0, 1]$ e continua in $x = 1$.

4 Esame del 10 febbraio 2016 - I^o turno

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{\log|x|}{\log^2|x| - \log|x| + 1}.$$

a) Determinarne il dominio, le eventuali simmetrie e gli eventuali asintoti. Dimostrare che f si può prolungare per continuità nel punto $x = 0$.

b) Indicando con g il prolungamento per continuità di f, calcolarne la derivata. Individuare gli eventuali punti di non derivabilità di g e specificarne il tipo.

c) Determinare gli intervalli di monotonia di g e gli eventuali punti di massimo e di minimo, specificandone il tipo.

d) Disegnare un grafico qualitativo di g.

e) Determinare le soluzioni dell'equazione $g(x) = 1$.

Esercizio 2.

a) Sia data una funzione continua $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$. Scrivere le definizioni di convergenza e di convergenza assoluta dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

b) Studiare il comportamento del seguente integrale improprio motivando i passaggi svolti

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx.$$

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) Poiché il denominatore è sempre diverso da 0 si ottiene dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Osserviamo che

$$f(-x) = \frac{\log|-x|}{\log^2|-x| - \log|-x| + 1} = \frac{\log|x|}{\log^2|x| - \log|x| + 1} = f(x).$$

Dunque la funzione è pari.

I limiti agli estremi del dominio sono (si è effettuata la sostituzione $\log|x| = t$):

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{t^2 - t + 1} = 0\,; \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{t^2 - t + 1} = 0.$$

Pertanto la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale (destro e sinistro) per f.

b) Poiché esiste finito il limite di f per $x \to 0$, f si può prolungare per continuità su $\mathbb{R}$, definendo la funzione prolungamento continuo di f su $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\log|x|}{\log^2|x| - \log|x| + 1} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Per vedere se g è derivabile in $x = 0$, calcoliamo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\log|x|}{\log^2|x| - \log|x| + 1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log|x|}{x(\log^2|x| - \log|x| + 1)}.$$

Calcoliamone il limite destro effettuando la sostituzione $\log x = t \Rightarrow x = e^t$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x(\log^2 x - \log x + 1)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^t(t^2 - t + 1)} = -\infty.$$

Operando in modo analogo per calcolarne il limite sinistro, si avrà

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(-x)}{x(\log^2(-x) - \log(-x) + 1)} = +\infty.$$

Pertanto $x = 0$ è un punto di cuspide.

c) Per determinare gli intervalli di monotonia di g e gli eventuali punti di massimo e di minimo, studiamo la derivata della funzione g; poiché g è pari, studiamo la derivata per $x > 0$. Essendo $g(x) = \dfrac{\log x}{\log^2 x - \log x + 1}$ per $x > 0$, si ha che

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{1}{x}(\log^2 x - \log x + 1) - \log x(2\log x\frac{1}{x} - \frac{1}{x})}{(\log^2 x - \log x + 1)^2} \\ &= \frac{(\log^2 x - \log x + 1) - \log x(2\log x - 1)}{x(\log^2 x - \log x + 1)^2} \\ &= \frac{\log^2 x - \log x + 1 - 2\log^2 x + \log x}{x(\log^2 x - \log x + 1)^2} \\ &= \frac{-\log^2 x + 1}{x(\log^2 x - \log x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Per $x > 0$:

$$g'(x) = 0 \iff -\log^2 x + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{e} \vee x = e,$$

$$g'(x) > 0 \iff -\log^2 x + 1 > 0 \iff \frac{1}{e} < x < e,$$

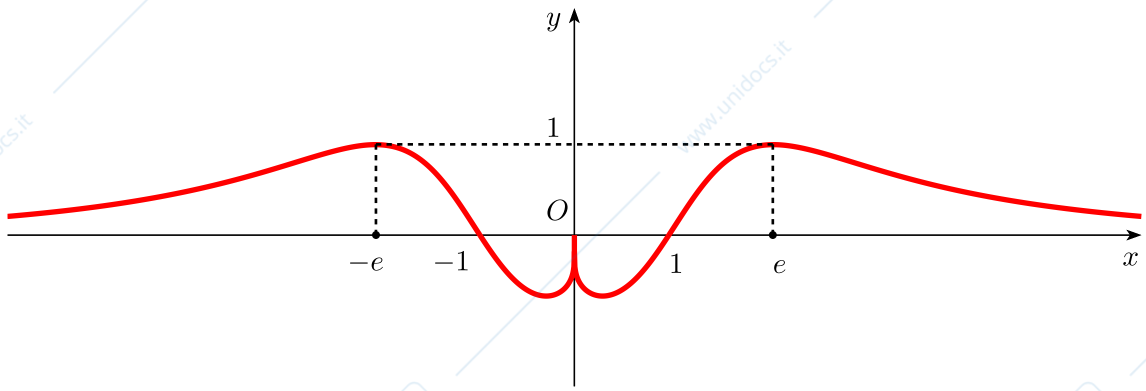
$$g'(x) < 0 \iff \frac{-\log^2 x + 1}{x} < 0 \iff 0 < x < \frac{1}{e} \vee x > e.$$

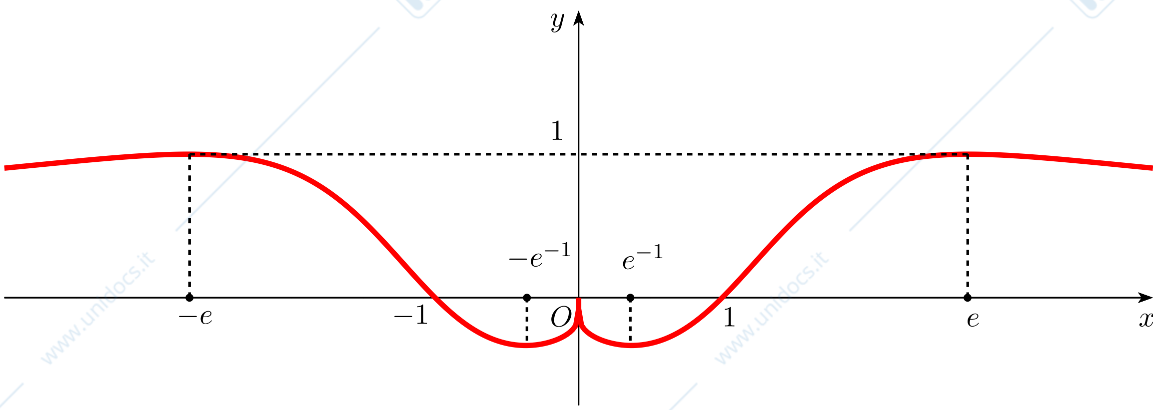
La funzione g è strettamente crescente su $\left[e^{-1}, e\right]$, mentre è strettamente decrescente su $\left[0, e^{-1}\right]$ e su $[e, +\infty)$.

Poiché la funzione g è pari, ossia il grafico della funzione g è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, si ha che g è strettamente decrescente su $\left[-e, -e^{-1}\right]$, mentre è strettamente crescente su $\left[-e^{-1}, 0\right]$ e su $(-\infty, -e]$.

I punti di estremo di una funzione continua vanno cercati tra i punti stazionari, gli eventuali punti di non derivabilità della funzione e gli estremi del dominio. I punti stazionari di f sono $x = -e$, $x = -e^{-1}$, $x = e^{-1}$ e $x = e$ ed esiste un punto di non derivabilità in $x = 0$. Dal segno della derivata prima si deduce che: g ha punti di massimo assoluto in $x = -e$ e in $x = e$, punti di minimo assoluto in $x = -e^{-1}$ e in $x = e^{-1}$, un punto di massimo relativo in $x = 0$.

d) Di seguito vengono proposti due grafici di g. Il primo è un grafico qualitativo di g e mostra l'andamento di g per $x \to \pm\infty$, ma non rispetta le proporzioni. Il secondo invece è un ingrandimento del grafico di g e mantiene le proporzioni.





e) Per determinare le soluzioni dell'equazione $g(x) = 1$, dobbiamo prima calcolare il valore della funzione nei punti di massimo assoluto:

$$f(-e) = f(e) = \frac{\log|e|}{\log^2|e| - \log|e| + 1} = 1.$$

Dunque l'equazione $g(x) = 1$ ha due soluzioni: $x = -e$ e $x = e$.

Esercizio 2.

a) Per definizione l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se esiste finito il limite

$$\lim_{c\to+\infty} \int_1^c f(x)\,dx.$$

Per definizione l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assoluamente se esiste finito il limite

$$\lim_{c\to+\infty} \int_1^c |f(x)|\,dx.$$

Per il criterio della convergenza assoluta, se l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente, allora converge. Il viceversa in generale non è vero.

b) La funzione $\frac{\sin x}{x^2}$ è continua e dunque localmente integrabile in $[1, +\infty)$.

Studiamo la convergenza assoluta: poiché $0 \le \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ e poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, per il teorema del confronto l'integrale assegnato converge assolutamente, e dunque $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ converge.

---

5 Esame del 10 febbraio 2016 - II^o turno

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = (\sinh 2x)^2 - 2\sinh 2x - 3 \quad \text{definita per } x \geq 0.$$

a) Determinarne i limiti agli estremi del dominio e dire se sono presenti asintoti.

b) Calcolarne la derivata e mostrare che esiste un unico punto $x_0 > 0$ tale che $f'(x_0) = 0$ (non è richiesto il valore esplicito di x_0).

c) Determinarne gli intervalli di monotonia e dire se esistono punti di massimo o di minimo.

d) Tracciarne un grafico qualitativo.

e) Sfruttare l'analisi precedente per tracciare il grafico della funzione $g(x) = f(|x|)$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ individuando gli eventuali punti di non derivabilità.

Esercizio 2.

a) Sia $\omega = \rho e^{i\vartheta}$. Dire come si calcolano modulo e argomento delle radici seste di ω.

b) Risolvere l'equazione $|\bar{z} - i|(z\bar{z}) = |\bar{z} - i|^3$ e rappresentarne le soluzioni nel piano di Gauss.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) La funzione f è la restrizione ad $x \geq 0$ della funzione composta di funzioni continue definite su $\mathbb{R}$, ovvero

$$f(x) = k(h(x)), \qquad h(x) = \sinh 2x\,, \quad k(t) = t^2 - 2t - 3\,.$$

Dunque f è definita e continua su $[0, +\infty)$. In particolare non ha asintoti verticali.

Il teorema sui limiti delle funzioni composte mostra che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
La funzione non ha asintoti obliqui perché l'ordine di infinito rispetto a x per $x \to +\infty$ è maggiore di 1.

b) La derivata di f è:

$$f'(x) = 4\,(\sinh 2x)\cosh 2x - 4\cosh 2x = 4\,(\cosh 2x)\,(\sinh 2x - 1)\ .$$

Ricordiamo che la funzione $\cosh 2x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque $f'(x) = 0$ se e solo se $p(x) = \sinh 2x - 1 = 0$. Poiché p è continua su $[0, +\infty)$, $p(0) = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$, per il Teorema degli zeri esiste $x_0 > 0$ tale che $p(x_0) = 0$. Essendo p strettamente crescente su $(0, +\infty)$, possiamo concludere che x_0 è l'unico zero di p, e quindi di f', in $(0, +\infty)$. Anche se non è richiesto non è difficile calcolare x_0. Infatti basta risolvere l'equazione

$$\sinh 2x = 1 \quad \text{ossia} \quad e^{2x} - e^{-2x} = 2\,.$$

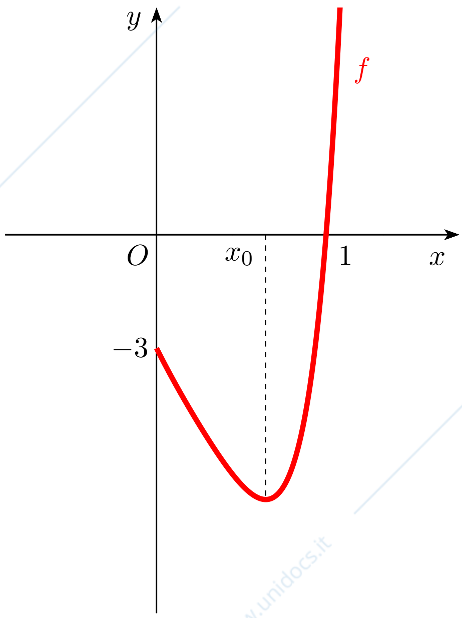
Posto $y = e^{2x}$ si trova l'equazione di secondo grado $y^2 - 2y - 1 = 0$.

L'esponenziale non è mai negativo e quindi l'unica soluzione accettabile dell'equazione è

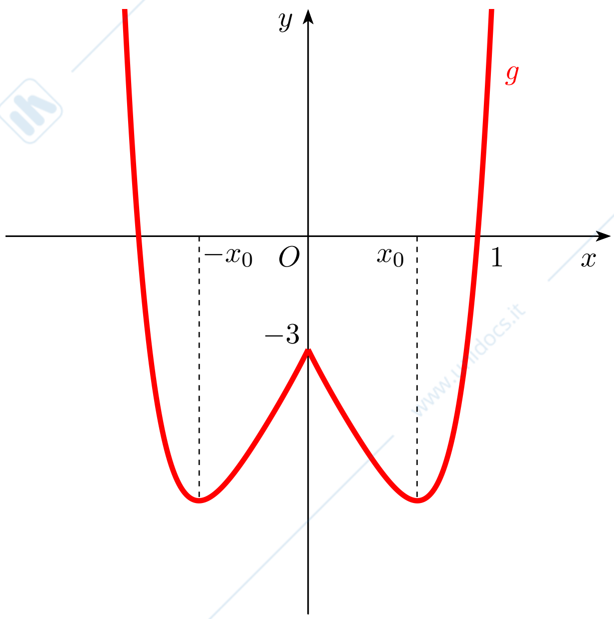
$$y = 1 + \sqrt{2} \quad \text{da cui} \quad x_0 = \frac{1}{2}\log\left(1 + \sqrt{2}\right)\ .$$

c) Da quanto osservato in precedenza si trova che f è crescente in $[x_0, +\infty)$ e decrescente in $[0, x_0]$. Il punto $x = 0$ è di massimo relativo, il punto x_0 è di minimo assoluto. Non esiste massimo assoluto perché la funzione è superiormente illimitata.

d) Il grafico è nella figura seguente.



e) La funzione g è l'estensione pari di f ed il suo grafico si ottiene simmetrizzando quello di f rispetto all'asse delle ordinate. Il grafico è nella figura seguente.



La funzione g è continua su $\mathbb{R}$ perché composizione di funzioni continue ed è derivabile perché composizione di funzioni derivabili in ogni $x \neq 0$.

Poiché

$$\lim_{x\to 0^-} g'(x) = 4 \neq \lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -4,$$

g non è derivabile in $x = 0$.

Esercizio 2.

a) Se $\omega = \rho e^{i\vartheta}$, le radici seste di ω sono date da

$$z_k = \sqrt[6]{\rho} e^{i\vartheta/6} e^{i2k\pi/6}, \qquad \text{dove le radici distinte si hanno per} \quad k = 0, \cdots, 5.$$

b) Una delle soluzioni è $\bar{z} = i$ ossia $z = -i$. Le altre soluzioni si ottengono risolvendo

$$z\bar{z} = |\bar{z} - i|^2 .$$

La presenza di una differenza suggerisce di usare l'espressione algebrica dei numeri complessi,

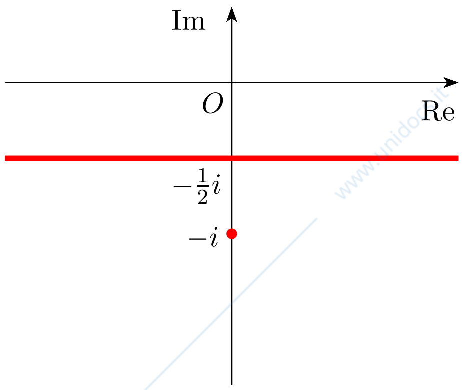
$$z = a + ib .$$

Va quindi risolta l'equazione

$$(a + ib)(a - ib) = |a - ib - i|^2 \qquad \text{ossia} \qquad a^2 + b^2 = a^2 + (b + 1)^2 .$$

L'uguaglianza non dipende da a che si potrà scegliere arbitrariamente, mentre b è dato da $b = -1/2$.

Dunque le soluzioni sono $z = -i$ e $z = a - (1/2)i$, per ogni $a \in \mathbb{R}$. Sul piano di Gauss, l'insieme delle soluzioni è dato dal punto di ascissa 0 e ordinata -1 e dalla retta parallela all'asse delle ascisse con ordinata $-1/2$.



6 Esame del 10 febbraio 2016 - III^o turno

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x) = 2\log|e^{2x} - 3e^x|.$$

a) Determinare il dominio di f e i limiti agli estremi del dominio.

b) Determinare l'equazione dell'asintoto di f per $x \to +\infty$.

c) Calcolare la derivata di f.

d) Determinare gli intervalli di monotonia di f ed i suoi eventuali punti di estremo assoluto e relativo.

e) Tracciare un grafico qualitativo di f.

f) Determinare il numero di zeri di f.

Esercizio 2.

a) Date due funzioni f, g continue su $\mathbb{R}$, scrivere la definizione di soluzione di un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t)g(y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

b) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = te^{-t^2}(y+1)^3 \\ y(0) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) E' sufficiente imporre che l'argomento del logaritmo sia diverso da zero:
$e^{2x} - 3e^x \neq 0 \iff e^x(e^x - 3) \neq 0 \iff e^x \neq 3 \iff x \neq \log 3$.
Dunque $\mathrm{dom} f = (-\infty, \log 3) \cup (\log 3, +\infty)$.
Agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2\log|e^{2x} - 3e^x| = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\log|e^{2x} - 3e^x| = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\log 3} 2\log(|e^x||e^x - 3|) = -\infty.$$

Quindi, la retta $x = \log 3$ è un asintoto verticale della funzione. Non ci sono asintori orizzontali.

b) Per $x \to +\infty$, possiamo riscrivere f nel seguente modo:

$$f(x) = 2\log(e^{2x} - 3e^x) = 2\log(e^{2x}(1-3e^{-x})) = 2\log e^{2x} + 2\log(1-3e^{-x}) = 4x + 2\log(1-3e^{-x}).$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty} 2\log(1 - 3e^{-x}) = 0$, si ha $f(x) = 4x + o(1)$, per $x \to +\infty$; pertanto la retta $y = 4x$ è un asintoto obliquo destro di f.

c) Ricordando che la derivata della funzione $f(x) = \log|h(x)|$ è $f'(x) = \dfrac{h'(x)}{h(x)}$, abbiamo:

$$f'(x) = 2\,\frac{2e^{2x} - 3e^x}{e^{2x} - 3e^x} = 2\,\frac{e^x(2e^x - 3)}{e^x(e^x - 3)} = 2\,\frac{2e^x - 3}{e^x - 3}.$$

d) Per determinarne gli intervalli di monotonia studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) < 0 \iff \log\frac{3}{2} < x < \log 3; \qquad f'(x) > 0 \iff x < \log\frac{3}{2} \ \vee\ x > \log 3.$$

Si conclude che f decresce strettamente in $\left[\log\frac{3}{2}, \log 3\right)$ e cresce strettamente in $\left(-\infty, \log\frac{3}{2}\right]$ e in $(\log 3, +\infty)$.

Il punto $x = \log\frac{3}{2}$ è un punto di massimo relativo; non ci sono punti di massimo assoluti e di minimo assoluti (perché la funzione è sia superiormente che inferiormente illimitata).

e) Per meglio rappresentare un grafico qualitativo di f, calcoliamo l'ordinata del punto di massimo relativo:

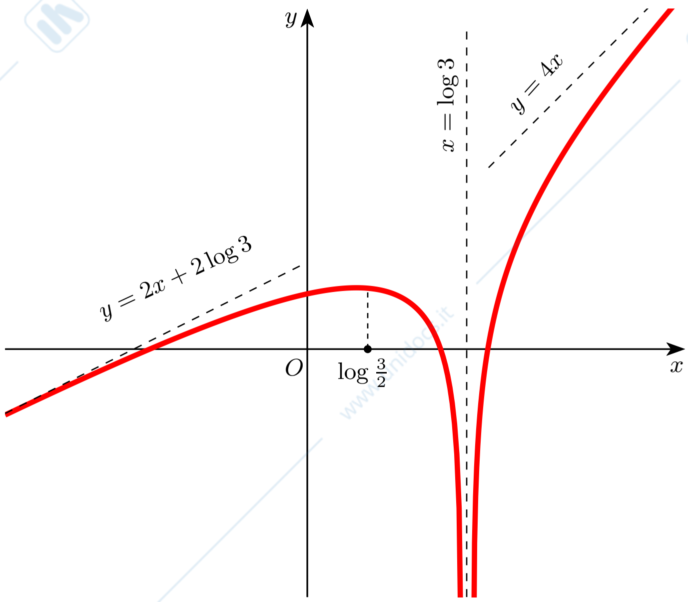
$$f\left(\log\frac{3}{2}\right) = 2\log\left|\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right| = \log\frac{81}{16} > 1.$$

Anche se non richiesto, è possibile calcolare l'equazione dell'asintoto obliquo per $x \to -\infty$. Si ha che per $x \to -\infty$

$$f(x) = 2\log(3e^x - e^{2x}) = 2\log\left[3e^x\left(1 - \frac{1}{3}e^x\right)\right] = 2\log(3e^x) + 2\log\left(1 - \frac{1}{3}e^x\right) =$$

$$= 2x + 2\log 3 + 2\log\left(1 - \frac{1}{3}e^x\right).$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty} 2\log\left(1 - \frac{1}{3}e^x\right) = 0$, si ha $f(x) = 2x + 2\log 3 + o(1)$, per $x \to -\infty$; pertanto la retta $y = 2x + 2\log 3$ è un asintoto obliquo sinistro di f.



f) Per determinare il numero di zeri di f, utilizziamo tre volte il teorema di esistenza degli zeri, uno per ogni intervallo di stretta monotonia: in $I_1 = \left(-\infty, \log\frac{3}{2}\right]$ la funzione è strettamente crescente e continua;

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) < 0 \quad \text{e} \quad f\left(\log\frac{3}{2}\right) > 0;$$

dunque f ha uno e un solo zero in I_1; in $I_2 = \left[\log\frac{3}{2}, \log 3\right)$ la funzione è strettamente decrescente e continua;

$$f\left(\log\frac{3}{2}\right) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\log 3^-} f(x) < 0;$$

dunque f ha uno e un solo zero in I_2; in $I_3 = (\log 3, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente e continua;

$$\lim_{x\to\log 3^+} f(x) < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) > 0;$$

dunque f ha uno e un solo zero in I_3. In conclusione f ha tre zeri.

Esercizio 2.

a) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto tale che $t_0 \in I$. Diciamo che $y : I \to \mathbb{R}$ è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t)g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

se y è derivabile in I, per ogni $t \in I$ risulta $y'(t) = f(t)g(y)$ e inoltre $y(t_0) = y_0$.

b) L'equazione è a variabili separabili, cioè della forma $y' = a(t)b(y)$, con $a(t) = t\,e^{-t^2}$ e $b(y) = (y+1)^3$.

Poiché a è continua su $\mathbb{R}$ e b è di classe C^1 su $\mathbb{R}$, il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione.

La soluzione costante $y(t) = -1$ dell'equazione non risolve il problema di Cauchy.

Usando il metodo risolutivo per le equazioni a variabili separabili, posto $y = y(t)$ si ha

$$\int (y+1)^3\,dy = 3\int t\,e^{-t^2}\,dt \quad\Longleftrightarrow\quad -\frac{1}{2}(y+1)^{-2} = -\frac{1}{2}te^{-t^2} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

e dunque

$$(y+1)^{-2} = \frac{1+ke^{t^2}}{e^{t^2}}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{6.0}$$

Le funzioni $y = y(t)$ che soddisfano (6.0) sono soluzioni dell'equazione differenziale, e sono definite in un intervallo da determinarsi a seconda della condizione iniziale.

Imponendo la condizione iniziale nell'espressione implicita della soluzione ottenuta sopra si ottiene $k = 3$ da cui otteniamo

$$(y+1)^2 = \frac{e^{t^2}}{1+3e^{t^2}} \Longrightarrow y+1 = \pm\sqrt{\frac{e^{t^2}}{1+3e^{t^2}}} \Longrightarrow y = -1 \pm \sqrt{\frac{e^{t^2}}{1+3e^{t^2}}}.$$

Poiché $y(0) = -1/2 > -1$, si deve scegliere la determinazione positiva della radice; dunque la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$y(t) = -1 + \sqrt{\frac{e^{t^2}}{1+3e^{t^2}}},$$

che è definita su $\mathbb{R}$.

7 Esame del 23 giugno 2016 - I^o turno

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x) = \log \arctan \frac{|x-1|}{|x-4|}.$$

a) Si determini il dominio di f, e si dimostri che f è prolungabile per continuità in $x = 4$.

b) Detto g il prolungamento di f così ottenuto, se ne determino i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

c) Si discuta la derivabilità di g, e se ne calcoli la derivata prima.

d) Determinare gli intervalli di monotonia di g ed i suoi eventuali punti di massimo e minimo, specificandone il tipo.

e) Tracciare un grafico qualitativo di g.

Esercizio 2.

a) Sia $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l \in \mathbb{R}$ e sia $a_n \le b_n \le c_n$, per ogni $n \ge 10^5$. Spiegare in base a quale teorema è possibile calcolare $\lim_{n\to\infty} b_n$.

b) Enunciare il teorema usato al punto precedente.

c) Sia $a_n = n \log n$. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti, motivando la risposta:

$$(1) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} (2e + \cos n\pi) , \qquad (2) \quad \lim_{n\to\infty} a_n (-1 + \cos n\pi) .$$

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) Dobbiamo imporre $x \neq 4$ e $\arctan \dfrac{|x-1|}{|x-4|} > 0 \iff \dfrac{|x-1|}{|x-4|} > 0$ e quindi $x \neq 1$.

Quindi $\mathrm{dom}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$.

Poiché $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \log \dfrac{\pi}{2}$, possiamo concludere che f è prolungabile per continuità in $x = 4$, definendo la funzione prolungamento continuo di f in $x = 4$ come:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \mathrm{dom}(f),\ x \neq 4 \\[2ex] \log \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = 4. \end{cases}$$

b) Come detto sopra, la funzione prolungamento continuo di f è

$$g(x) = \begin{cases} \log \arctan \dfrac{|x-1|}{|x-4|} & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty) \\[2ex] \log \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 4. \end{cases}$$

Quindi $\mathrm{dom}(g) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = \log \frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{x \to 1} g(x) = -\infty.$$

Dunque, la retta $x = 1$ è asintoto verticale e la retta $y = \log \dfrac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale (destro e sinistro) di g.

c) La funzione g è derivabile in $(-\infty, 1)$, in $(1, 4)$ e in $(4, +\infty)$; dunque si deve controllare la derivabilità solo nel punto $x = 4$.

Procediamo con il *Teorema del tappabuchi*, e calcoliamo il limite della funzione g' per $x \to 4$. Si ha:

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\arctan \frac{x-1}{x-4}} \cdot \dfrac{(x-4)^2}{(x-4)^2 + (x-1)^2} \cdot \dfrac{-3}{(x-4)^2} & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty) \\[3ex] \dfrac{1}{-\arctan \frac{x-1}{x-4}} \cdot \dfrac{(x-4)^2}{(x-1)^2 + (x-1)^2} \cdot \dfrac{3}{(x-4)^2} & \text{se } x \in (1, 4) \end{cases}$$

e quindi

$$g'(x) = \frac{1}{\arctan \frac{x-1}{x-4}} \cdot \frac{-3}{(x-1)^2 + (x-4)^2}$$

per ogni $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$.

Poiché

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{1}{\arctan \frac{x-1}{x-4}} = \frac{2}{\pi} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 4^-} \frac{1}{\arctan \frac{x-1}{x-4}} = -\frac{2}{\pi}$$

si ha che

$$\lim_{x\to 4^+} g'(x) = -\frac{2}{3\pi} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 4^-} g'(x) = \frac{2}{3\pi}.$$

Per il *Teorema del tappabuchi* g non è derivabile in $x = 4$, che risulta essere un punto angoloso.

d) Poiché

$$g'(x) = \frac{1}{\arctan \frac{x-1}{x-4}} \cdot \frac{-3}{(x-1)^2 + (x-4)^2}$$

si ha:

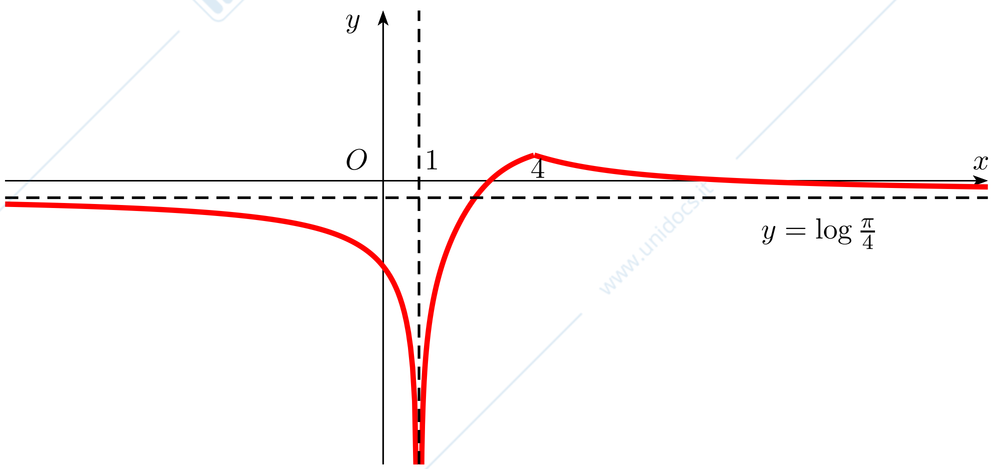
$$g'(x) > 0 \iff \arctan \frac{x-1}{x-4} < 0 \iff \frac{x-1}{x-4} < 0 \iff 1 < x < 4.$$

Pertanto g è strettamente crescente in $(1, 4]$ mentre è strettamente descrescente in $(-\infty, 1)$ e in $[4, +\infty)$.

Il punto $x = 4$ è un punto di massimo assoluto; non esistono punti di minimo, né relativo né assoluto.

e) La retta $y = \frac{\pi}{4}$ è un asintoto orizzontale completo anche per g; la retta $x = 1$ è un asintoto verticale anche per g.

Un grafico qualitativo di g è



Svolgimento alternativo dell'Esercizio 1.

Osserviamo che la funzione f è composizione di quattro funzioni:

$$x \xmapsto{h} h(x) = \frac{x-1}{x-4} \xmapsto{|\cdot|} k(x) = |h(x)| = \left|\frac{x-1}{x-4}\right| \longmapsto$$

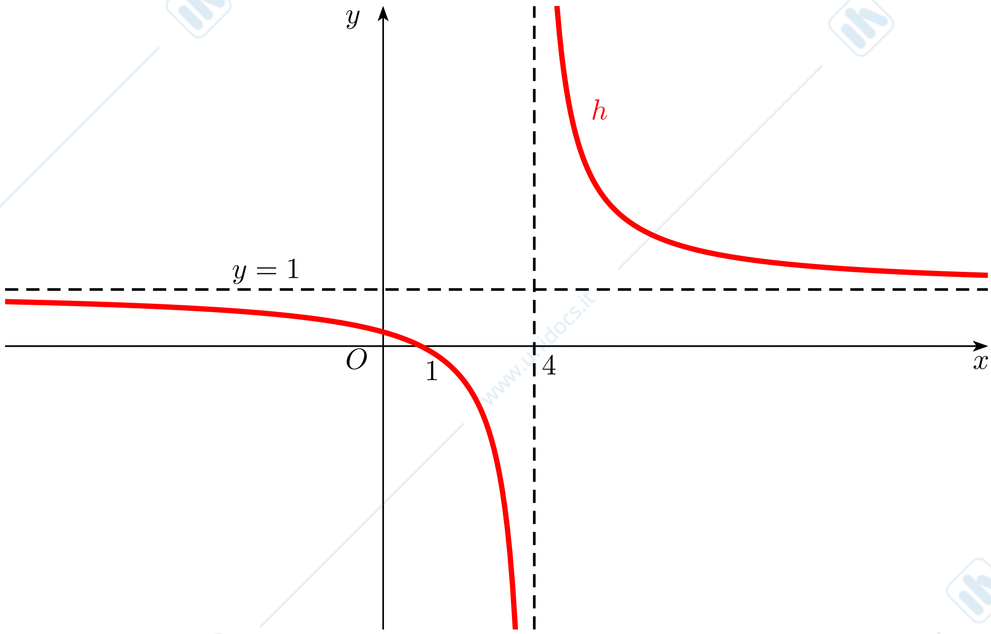
$$\xmapsto{\arctan} p(x) = \arctan k(x) = \arctan \left|\frac{x-1}{x-4}\right| \xmapsto{\log} f(x) = \log p(x) = \log \arctan \left|\frac{x-1}{x-4}\right|.$$

Possiamo svolgere l'esercizio passo passo partendo dalla prima funzione.

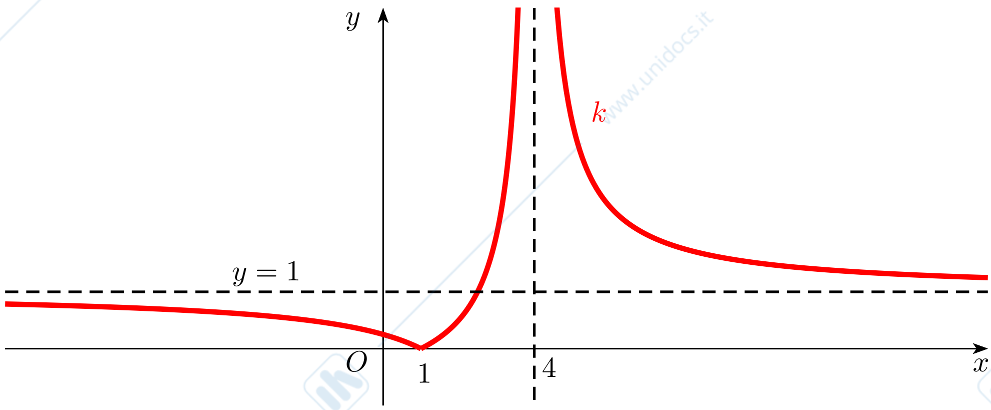
1) La funzione $h(x) = \frac{x-1}{x-4} = 1 + \frac{3}{x-4}$ ha per grafico un'iperbole, con asintoto verticale $x = 4$ e asintoto orizzontale completo $y = 1$.

Inoltre $h(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ e $h(x) < 0$ se e solo se $x \in (0, 1)$.

Il suo grafico è



2) Il grafico di $k(x) = |h(x)| = \left|\frac{x-1}{x-4}\right|$ si ricava da quello di h lasciando inalterate le parti del grafico di h al di sopra dell'asse x e ribaltando di un angolo piatto rispetto all'asse x la parte del grafico di h al di sotto dell'asse x.

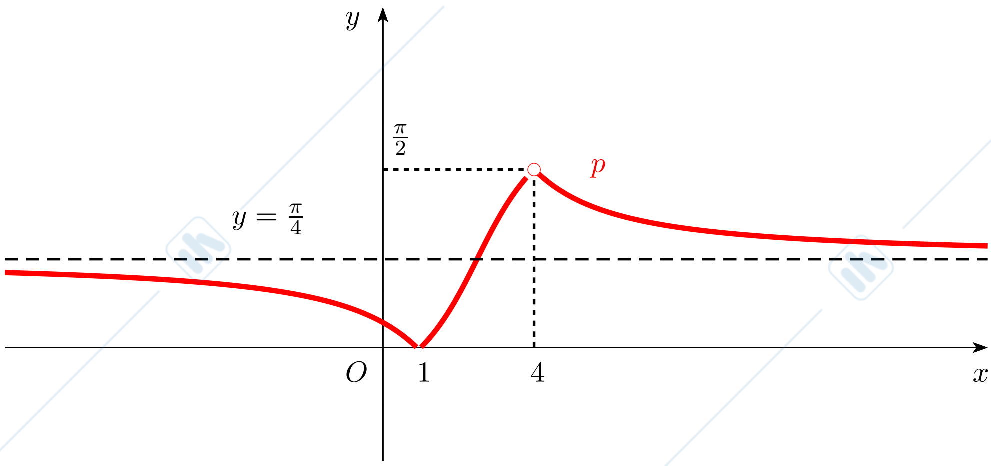


La funzione k è strettamente crescente in $[1, 4)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 1]$ e $(4, +\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x\to 4} k(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} k(x) = \lim_{x\to +\infty} k(x) = 1.$$

3) Poiché la funzione arcotangente è strettamente crescente, gli intervalli di monotonia e i punti di estremo della funzione $p(x) = \arctan k(x)$ sono gli stessi di k. Inoltre $\operatorname{sgn} p = \operatorname{sgn} k$. Inoltre

$$\lim_{x\to 4} p(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to -\infty} k(x) = \lim_{x\to +\infty} k(x) = \frac{\pi}{4}.$$



4) Infine consideriamo $f(x) = \log p(x) = \log \arctan \left|\frac{x-1}{x-4}\right|$.

Si ha che $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \ p(x) > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$.

Poiché $\lim_{x\to 4} f(x) = \log \dfrac{\pi}{2}$ la funzione f è prolungabile per continuità in $x = 4$.

La funzione $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 1, 4 \\ \log \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 4. \end{cases}$ è il prolungamento continuo di f richiesto.

I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \log \frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{x\to 1} g(x) = -\infty.$$

Dunque, la retta $x = 1$ è asintoto verticale e la retta $y = \log \dfrac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale completo di g.

La funzione g è dervabile in ogni $x \neq 1, 4$ con

$$g'(x) = \frac{1}{\arctan \frac{x-1}{x-4}} \cdot \frac{-3}{(x-1)^2 + (x-4)^2}.$$

Poiché g è continua in $x = 4$, per stabilire la derivabilità di g in $x = 4$ calcoliamo il limite di g' per $x \to 4$. Si ha che

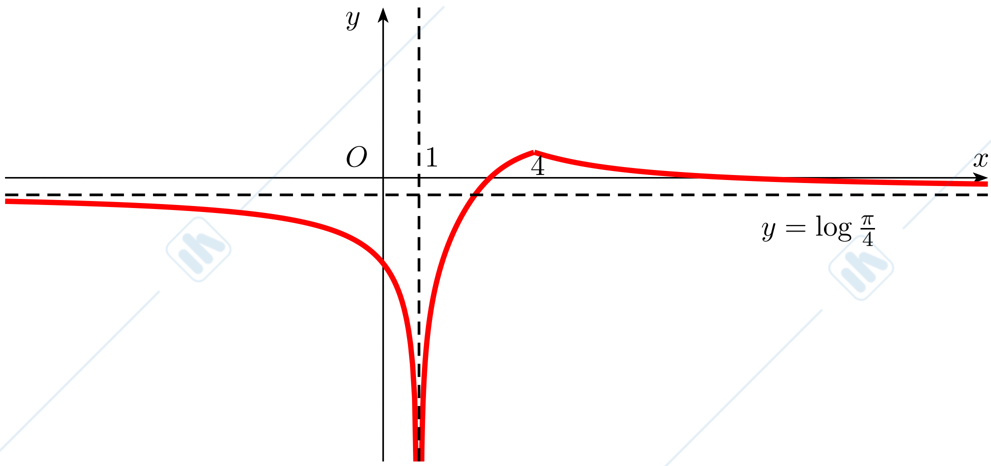
$$\lim_{x\to 4^+} g'(x) = -\frac{2}{3\pi} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 4^-} g'(x) = \frac{2}{3\pi}.$$

Per il *Teorema del tappabuchi* g non è derivabile in $x = 4$, che risulta essere un punto angoloso.

La funzione logaritmo è strettamente crescente; ne segue che g è strettamente crescente in $(1, 4]$ mentre è strettamente descrescente in $(-\infty, 1)$ e in $[4, +\infty)$.

Il punto $x = 4$ è un punto di massimo assoluto; non esistono punti di minimo, né relativo né assoluto.

Un grafico qualitativo di g è



Esercizio 2.

a) Per il secondo teorema del confronto (noto anche come Teorema dei due carabinieri), poiché esiste un intorno di $+\infty$ in cui $a_n \leq b_n \leq c_n$ e poiché $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l \in \mathbb{R}$, allora anche $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.

b) **Teorema (secondo teorema del confronto).** Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ tre funzioni e $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A. Supponiamo che

1) esistano $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$;
2) esista un intorno $I(x_0)$ di x_0 tale che per ogni $x \in (A \cap I(x_0)) \setminus \{x_0\}$ si abbia $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Allora $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$.

c) 1) Poiché $\forall t \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \cos t \leq 1$ e $a_n > 0, \forall n \geq 2, \quad$ si ha:

$$\frac{1}{a_n}(2e-1) \leq \frac{1}{a_n}(2e+\cos n\pi) \leq \frac{1}{a_n}(2e+1).$$

Poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\log n}(2e-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\log n}(2e+1) = 0$, per il secondo teorema del confronto anche $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}(2e+\cos n\pi) = 0$.

2) Poiché $\cos n\pi = (-1)^n$, si deve considerare la successione

$$b_n = a_n\,(-1+\cos n\pi) = n\log n\,(-1+(-1)^n)\,.$$

Per ogni $n = 2k$, con $n \geq 2$, si ha che $b_n = b_{2k} = 0$.

Per ogni $n = 2k+1$, con $n \geq 3$, si ha che $b_n = b_{2k+1} = -(2k+1)\log(2k+1)$ e quindi

$$\lim_{k\to+\infty} b_{2k} = 0 \neq \lim_{k\to+\infty} b_{2k+1} = -\infty.$$

Ne segue che (b_n) non ha limite.

8 Esame del 23 giugno 2016 - II^o turno

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(2|x| - 1)(x - 2)^2}.$$

a) Determinarne il dominio, gli zeri e i limiti agli estremi del dominio.

b) Dire se f ha asintoti obliqui e eventualmente calcolarli.

c) Calcolarne la derivata. Individuarne gli eventuali punti di non derivabilità, stabilendone il tipo.

d) Determinarne gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e di minimo locali e assoluti.

e) Tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2.

a) Scrivere la definizione di soluzione dell'equazione differenziale lineare

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ e f funzione continua su $\mathbb{R}$.

b) Data l'equazione differenziale lineare

$$y'' + 3y' = 3x$$

1) dire se esistono soluzioni limitate su $\mathbb{R}$ dell'equazione differenziale lineare omogenea associata;

2) calcolare l'integrale generale dell'equazione assegnata.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) Si ha che $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$. Inoltre

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2|x|-1)(x-2)^2 \Leftrightarrow (2|x|-1) = 0 \ \vee \ x-2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2} \ \vee \ x = 2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

b) Si ha che

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(-2x-1)(x-2)^2} & \text{se } \ x<0 \\ \\ \sqrt[3]{(2x-1)(x-2)^2} & \text{se } \ x \geq 0, \end{cases} = \begin{cases} \sqrt[3]{-2x^3+7x^2-4x-4} & \text{se } \ x<0 \\ \\ \sqrt[3]{2x^3-9x^2+12x-4} & \text{se } \ x \geq 0. \end{cases}$$

Per $x<0$ si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{-2x^3+7x^2-4x-4} = \sqrt[3]{-2x^3\left(1-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)} \\ &= -\sqrt[3]{2}\,x\left(1-\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\sqrt[3]{2}\,x+\sqrt[3]{2}\,\frac{7}{6}+o(1), \quad \text{per } x\to-\infty. \end{aligned}$$

Pertanto la retta di equazione $y = -\sqrt[3]{2}\,x + \dfrac{7\sqrt[3]{2}}{6}$ è l'asintoto obliquo sinistro di f.

Per $x \geq 0$ si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{2x^3-9x^2+12x-4} = \sqrt[3]{2x^3\left(1-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)} \\ &= \sqrt[3]{2}\,x\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \sqrt[3]{2}\,x-\sqrt[3]{2}\,\frac{3}{2}+o(1), \quad \text{per } x\to+\infty. \end{aligned}$$

Quindi la retta di equazione $y = \sqrt[3]{2}\,x - \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ è l'asintoto obliquo destro di f.

c) La funzione f è continua su $\mathbb{R}$ ma non è necessariamente derivabile nei suoi zeri e in $x=0$. Dunque

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\,\dfrac{-3x^2+7x-2}{\sqrt[3]{[(-2x-1)(x-2)^2]^2}} = \dfrac{-2(3x-1)}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2(x-2)}} & \text{se } x<0, x\neq-\dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{6}{3}\,\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{[(2x-1)(x-2)^2]^2}} = \dfrac{2(x-1)}{\sqrt[3]{(2x-1)^2(x-2)}} & \text{se } x>0, x\neq\dfrac{1}{2}, x\neq 2. \end{cases}$$

Poiché $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f'(x) = -\infty$, f non è derivabile in $x=-\dfrac{1}{2}$, dove vi è un punto di flesso discendente a tangente verticale.

Si ha $\lim_{x\to0^-} f'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{2}}$ e $\lim_{x\to0^+} f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$; quindi f non è derivabile in $x=0$, che risulta essere un punto angoloso.

Poiché $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f'(x) = +\infty$, f non è derivabile in $x = \dfrac{1}{2}$, dove vi è un punto di flesso ascendente a tangente verticale.

Infine, poiché $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty$, f non è derivabile in $x = 2$, che risulta un punto di cuspide.

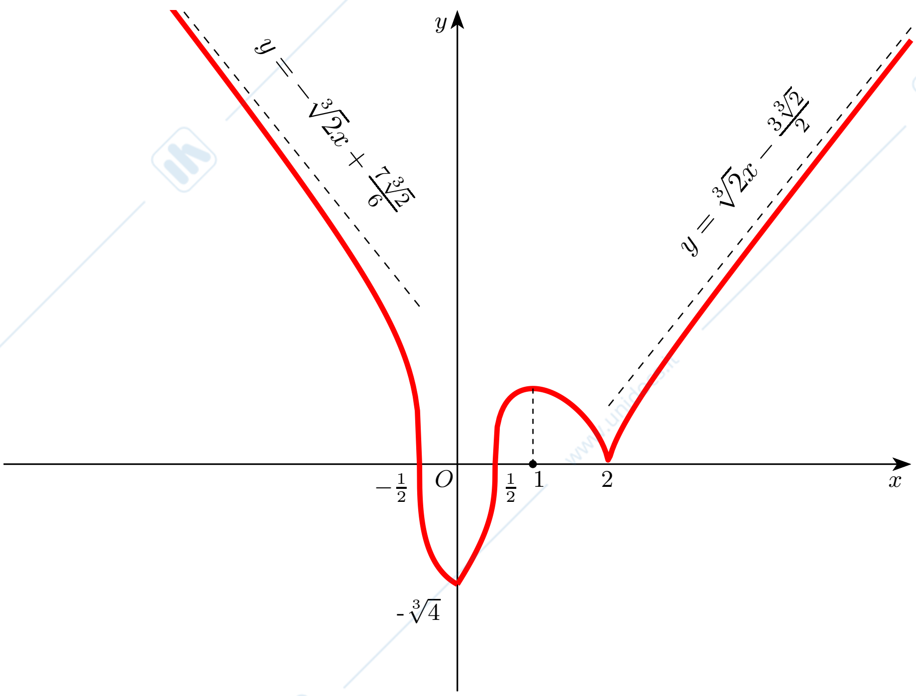
d) Per $x < 0$ si ha $\dfrac{-2(3x-1)}{\sqrt[3]{(x-2)}} < 0$, per cui $f'(x) < 0$ per $x < 0$.

Per $x > 0$ si ha $\dfrac{2(x-1)}{\sqrt[3]{(x-2)}} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \ \vee \ x > 2$ e $\dfrac{2(x-1)}{\sqrt[3]{(x-2)}} < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$

Dunque la funzione f è decrescente strettamente in $(-\infty, 0]$ e in $[1, 2]$ ed è crescente strettamente in $[0, 1]$ e in $[2, +\infty)$.

$x = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto, $x = 1$ è un punto di massimo relativo, $x = 2$ è un punto di minimo relativo.

e) Un grafico qualitativo di f è



Esercizio 2.

a) Una soluzione dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

è una funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte tale che

$$u''(x) + au'(x) + bu(x) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) L'insieme delle soluzioni, o integrale generale, di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea $y'' + ay' + by = f(x)$ è dato da $y = y_o + y_p$, dove y_o è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y'' + ay' + by = 0$ e y_p è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $y'' + ay' + by = f(x)$.

Per ricavare l'integrale generale dell'equazione omogenea risolviamo l'equazione caratteristica $\lambda^2 + 3\lambda = 0$, che ha soluzioni $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3$.

Dunque l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è

$$\left\{c_1 + c_2 e^{-3x} : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

1) Ponendo $c_2 = 0$ troviamo le soluzioni costanti $y(x) = c$ che sono tutte limitate su $\mathbb{R}$. Se $c_2 \neq 0$ le soluzioni sono illimitate perché $\lim\limits_{x \to -\infty} \left|c_1 + c_2 e^{-3x}\right| = +\infty$ per ogni $c_2 \neq 0$ e per ogni $c_1 \in \mathbb{R}$.

2) La forzante dell'equazione completa è del tipo $f(x) = e^{0x} p_1(x)$, con $p_1(x) = 3x$ (polinomio di grado 1). Poiché $\lambda = 0$ è radice dell'equazione caratteristica, una soluzione particolare dell'equazione completa sarà del tipo $y_p(x) = x(ax + b) = ax^2 + bx$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

   Si ha che

$$y_p'(x) = 2ax + b, \qquad y_p''(x) = 2a.$$

   Sostituendo nell'equazione data, abbiamo che y_p è soluzione dell'equazione se e solo se per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$2a+3(2ax+b) = 3x \iff 6ax+2a+3b = 3x \iff \begin{cases} 6a = 3 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/3. \end{cases}$$

   Quindi $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$. L'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$\left\{c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

9 Esame del 21 settembre 2016

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x) = e^{(x+1)|(x+1)^2 - 3|}.$$

a) Determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

b) Calcolarne la derivata, individuando gli eventuali punti di non derivabilità.

c) Determinarne gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo.

d) Rappresentarne il grafico.

e) Determinare le soluzioni dell'equazione $f(x) = 1$.

Esercizio 2. Sia

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x+1} & \text{se } 1 \le x \le 3 \\ \\ x-3 & \text{se } 3 < x \le 4. \end{cases}$$

a) Calcolare l'area della parte di piano delimitata dall'asse x, dalle rette $x = 1$, $x = 4$ e dal grafico di $h(x)$.

b) Enunciare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

c) Verificare se la funzione assegnata al punto *a*) soddisfa le ipotesi del Teorema fondamentale del calcolo integrale nell'intervallo $[1, 4]$.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) La funzione è composizione di funzioni elementari definite e continue su tutto $\mathbb{R}$; ne deduciamo che dom$f = \mathbb{R}$ e f è continua nel suo dominio. In particolare, non esistono asintoti verticali.

I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Quindi, $y = 0$ è un asintoto orizzontale sinistro.

Poiché $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, non esiste asintoto obliquo destro.

b) Poiché

$$f(x) = \begin{cases} e^{(x+1)((x+1)^2-3)} & \text{se } x \in (-\infty, -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}, +\infty) \\ \\ e^{-(x+1)((x+1)^2-3)} & \text{se } x \in [-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}], \end{cases}$$

se ne deduce che f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-1 \pm \sqrt{3}\}$ perché è composizione di funzioni derivabili e

$$f'(x) = \begin{cases} 3[(x+1)^2-1] \cdot e^{(x+1)((x+1)^2-3)} & \text{se } x \in (-\infty, -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}, +\infty) \\ \\ -3[(x+1)^2-1] \cdot e^{-(x+1)((x+1)^2-3)} & \text{se } x \in (-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}). \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x\to(-1-\sqrt{3})^+} f'(x) = -6, \qquad \lim_{x\to(-1-\sqrt{3})^-} f'(x) = 6,$$
$$\lim_{x\to(-1+\sqrt{3})^+} f'(x) = 6, \qquad \lim_{x\to(-1+\sqrt{3})^-} f'(x) = -6.$$

Quindi f non è derivabile in $x = -1 \pm \sqrt{3}$ che sono punti angolosi.

c) Se $x \in (-\infty, -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}, +\infty)$, si ha

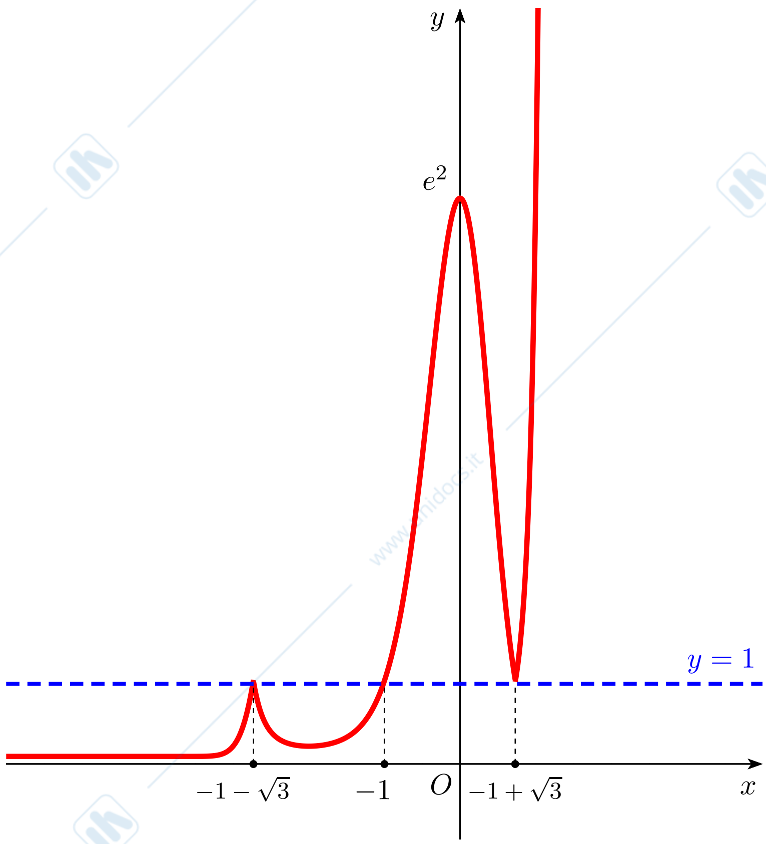
$$f'(x) > 0 \iff (x+1)^2 - 1 > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

da cui segue che f è strettamente crescente in $(-\infty, -1-\sqrt{3}]$ e in $[-1+\sqrt{3}, +\infty)$. Un analogo calcolo permette di concludere che f è strettamente crescente in $[-2, 0]$, strettamente decrescente in $[-1-\sqrt{3}, -2]$ e in $[0, -1+\sqrt{3}]$. In particolare, dalla monotonia deduciamo che $x = -1-\sqrt{3}$ e $x = 0$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = -2$ e $x = -1+\sqrt{3}$ sono punti di minimo relativo.

Poiché la funzione è superiormente illimitata, non ammette punti di massimo assoluto.

Infine, essendo $\displaystyle\inf_{x\in\mathbb{R}} f = 0$ e $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione non ammette punti di minimo assoluto.

d) Un grafico qualitativo di f è



e) Risolviamo esplicitamente l'equazione $f(x) = 1$:

$$f(x) = 1 \iff (x+1)\left|(x+1)^2 - 3\right| = 0.$$

Quindi le soluzioni si hanno per $x = -1$, oppure se $\left|(x+1)^2 - 3\right| = 0$, da cui si ricavano i punti $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

Esercizio 2.

a) Poniamo $h_1(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$, $x \in [1,3]$ e $h_2(x) = x - 3$, $x \in [3,4]$.

Poiché se $x \in [1,3]$ si ha $h_1(x) \leq 0$, mentre se $x \in [3,4]$ si ha $h_2(x) \geq 0$, l'area A della parte di piano delimitata dall'asse x, dalle rette $x = 1$, $x = 4$ e dal grafico di $h(x)$ si ottiene calcolando:

$$A = \int_1^3 (-h_1(x))\,dx + \int_3^4 h_2(x)\,dx = \int_1^3 \frac{3-x}{x+1}\,dx + \int_3^4 (x-3)\,dx =$$

$$= \int_1^3 \left(-1 + \frac{4}{x+1}\right)\,dx + \int_3^4 (x-3)\,dx =$$

$$= \Big| -x + 4\log|x+1| \Big|_1^3 + \left|\frac{x^2}{2} - 3x\right|_3^4 = \log 16 - \frac{3}{2}.$$

b) **Teorema (fondamentale del calcolo integrale).** Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $x_0 \in I$ e $F : I \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\forall x \in \mathbb{R} : \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Allora F è derivabile su I con $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. In particolare F è una primitiva di f su I.

c) La funzione $h(x)$ è continua nell'intervallo $[1, 4]$, in quanto:

- la funzione $h_1(x)$ è continua in $[1, 3]$;
- la funzione $h_2(x)$ è continua ovunque, in particolare in $[3, 4]$;
- nel punto di raccordo $x = 3$ si ha $\lim_{x \to 3^-} h_1(x) = h(3) = 0 = \lim_{x \to 3^+} h_2(x)$.

Quindi $h(x)$ soddisfa le ipotesi del Teorema fondamentale del calcolo integrale nell'intervallo $[1, 4]$.