

DIAGONALIZZAZIONE

5

dunque, eguagliando le componenti, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ 2c=2 \\ 2d=4 \end{cases}$$

da cui si ricava $w_1 = (0, -2)$, $w_2 = (1, 2)$. Calcoliamo $M(f)$: si ha $e_1 := (1, 0)$, sicché $f(e_1) = (2, 4)$, mentre $e_2 = -w_1/2$, sicché $f(e_2) = (0, 0)$, da cui

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Trovare $f \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ avente $(2, 2)$ ed $(-1, 3)$ come autovettori e tale che $f(0, 1) = (2, 1)$.

Svolgimento. Si ha che $(2, 2) + 2(-1, 3) = 8(0, 1)$. Dunque, indicati con α e con β gli autovalori relativi agli autovettori $(2, 2)$ ed $(-1, 3)$ rispettivamente, possiamo scrivere

$$(16, 8) = 8f(0, 1) = f((2, 2) + 2(-1, 3)) = \alpha(2, 2) + 2\beta(-1, 3).$$

Ciò equivale al sistema

$$\begin{cases} 2\alpha - 2\beta = 16 \\ 2\alpha + 6\beta = 8, \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(\alpha, \beta) = (7, -1)$.

Calcoliamo $M(f)$: si ha $e_1 := 3/4(1, 1) - 1/4(-1, 3)$ sicché $f(e_1) = (5, 6)$, mentre $e_2 = 1/4(1, 1) + 1/4(-1, 3)$, sicché $f(e_2) = (2, 1)$, da cui

$$M(f) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

QUIZ

Quiz 1. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ avente $(1, 2)$ ed $(1, 3)$ come autovettori e tale che $f(1, 0) = (4, 6)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- f non è semplice.
- f ha autovalori 1, 2.
- $p(t) = t^2 + 3t + 2$ è il polinomio caratteristico di f .
- $f(1, 0) = (-1, -1)$.

Svolgimento. Iniziamo a studiare f . Innanzi tutto $(1, 0) = 3(1, 2) - 2(1, 3)$: indicando con α l'autovalore relativo ad $(1, 2)$ e con β quello relativo a $(1, 3)$ si ha $(4, 6) = f(1, 0) = f(3(1, 2) - 2(1, 3)) = 3\alpha(1, 2) - 2\beta(1, 3)$. In componenti questo significa

$$\begin{cases} 3\alpha - 2\beta = 4 \\ \alpha - \beta = 1. \end{cases}$$

Tale sistema ha unica soluzione $(\alpha, \beta) = (2, 1)$, quindi $p_f(t) = (t - 1)(t - 2)$.

L'affermazione a) è falsa. Infatti f ha due autovettori linearmente indipendenti, quindi esiste una base di \mathbb{R}^2 formata da autovettori di f .

L'affermazione b) è vera per quanto osservato preliminarmente.

L'affermazione c) è falsa. Infatti 1 e 2 non sono radici di $t^2 + 3t + 2$.

L'affermazione d) è falsa. Infatti $f(1, 0) = (4, 6)$ per ipotesi.