

# Lezione 9

## 9.1 Equazioni parametriche di rette

In questa lezione daremo una descrizione parametrica di oggetti geometrici quali rette (nel piano e nello spazio) e piani nello spazio. Nella prossima lezione ci occuperemo di definire gli stessi oggetti tramite equazioni lineari, ovvero della loro descrizione cartesiana

Cominciamo a caratterizzare rette nello spazio. Sia  $r \subseteq S_3$  una tale retta: osserviamo che  $r$  è sempre parallela ad un'unica retta passante per l'origine  $r'$  e rimane completamente individuata da essa e da un punto qualsiasi  $R \in r$ . Ciò significa che dare  $r'$  equivale a dare un qualsiasi vettore non nullo  $\vec{v}$  avente  $r'$  come direzione, come si può vedere nella Figura 9.1. In altre parole, **una retta nello spazio è completamente individuata dalla sua direzione  $\vec{v} \neq \vec{0}$  e da un suo punto qualsiasi  $R$ .**

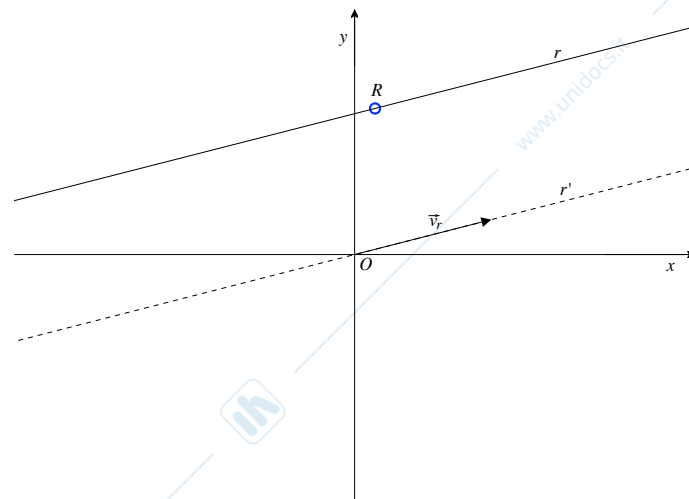


Figura 9.1

Cerchiamo un modo per caratterizzare i punti della retta  $r$ : per definizione, per ogni punto  $P \in r$  vale che

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} = P - R;$$

sommando ad ambo i membri  $\overrightarrow{OR}$  segue che

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + (P - R).$$

Poiché  $P - R$  è parallelo al segmento  $\overline{PR}$ , dunque a  $r$ , ha direzione  $r'$ ; quindi esso è parallelo al vettore  $\vec{v}$  menzionato sopra, come mostrato nella Figura 9.2.

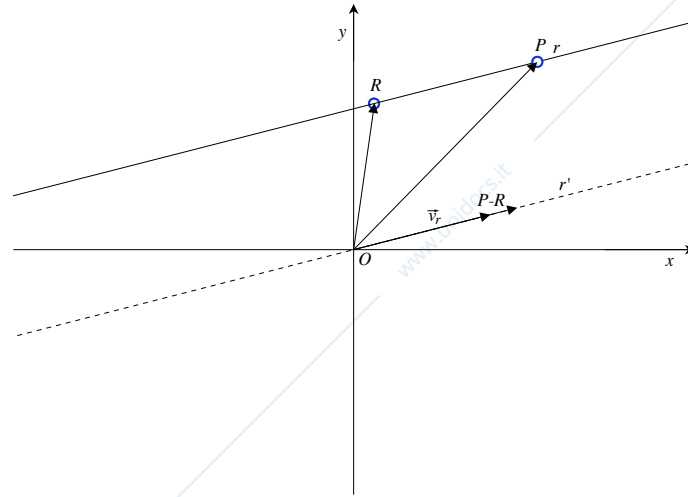


Figura 9.2

Dalla caratterizzazione di vettori paralleli mostrata nella Proposizione 7.14 segue che  $P - R \parallel \vec{v}$  se e solo se esiste un numero reale, che chiameremo  $t$ , tale che  $P - R = t\vec{v}$ . Segue quindi che un punto dello spazio  $P \in S_3$  giace sulla retta  $r$  se e solo se

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + t\vec{v}, \quad (9.1.1)$$

per qualche valore di  $t \in \mathbb{R}$ .

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  in  $S_3$ . Supponiamo che in tale sistema il punto  $R$  abbia coordinate  $R = (x_0, y_0, z_0)$ , quindi

$$\overrightarrow{OR} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k},$$

e  $\vec{v} = \ell\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ : indicando con  $(x, y, z)$  le coordinate del punto generico  $P \in S_3$  si ha  $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , dunque l'equazione (9.1.1) diventa

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + t(\ell\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}),$$

per qualche valore di  $t \in \mathbb{R}$ , oppure, eguagliando le componenti dei due vettori lungo gli assi coordinati,

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + m t \\ z = z_0 + n t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (9.1.2)$$

Le equazioni (9.1.2) sono dette *equazioni parametriche della retta  $r$  passante per il punto  $R = (x_0, y_0, z_0)$  e parallela al vettore  $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k} \neq \vec{0}$* .

Viceversa, supponiamo di avere fissato nello spazio  $S_3$  un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ . Dati numeri reali fissati  $x_0, y_0, z_0, l, m, n$ , si consideri il luogo  $r$  dei punti  $P = (x, y, z)$  dello spazio le cui coordinate sono della forma

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Allora, preso  $t = 0$ , segue che il punto  $R = (x_0, y_0, z_0) \in r$ . Se poi  $l, m, n$  non sono tutti nulli, esistono in  $R$  infiniti altri punti  $P$  tali che

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + t(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}),$$

ovvero tali che  $P - R = \overrightarrow{OR} + t\vec{v}$  ove  $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ . Tali punti descrivono quindi la retta passante per il punto  $R$  sopra definito e parallela al vettore non nullo  $\vec{v}$ .

Concludiamo che, fissato in  $S_3$  un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ , ogni retta può essere descritta mediante un sistema di equazioni della forma (9.1.2) con  $l, m, n$  non tutti nulli e, viceversa, ogni sistema di equazioni della forma (9.1.2) con  $l, m, n$  non tutti nulli rappresenta una retta nello spazio.

**Esempio 9.1.** In  $S_3$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ ,  $A = (1, 2, 3) \in S_3$  e  $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{k} \in V_3(O)$ . Delle equazioni parametriche della retta  $r$  di  $S_3$  parallela al vettore  $\vec{v}$  e passante per  $A$  sono date da

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 3 - 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (9.1.3)$$

Ci chiediamo quale fra i punti  $B = (3, 2, 0)$  e  $C = (-1, 2, 1)$  di  $S_3$  appartenga alla retta  $r$ . Per rispondere bisogna capire se esistono valori di  $t \in \mathbb{R}$  per cui le coordinate di  $B$  e  $C$  possono essere scritte nella forma data dall'equazione (9.1.2), ovvero se e quale fra i due sistemi

$$\begin{cases} 3 = 1 + 2t \\ 2 = 2 \\ 0 = 3 - 3t, \end{cases} \quad \begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ 2 = 2 \\ 1 = 3 - 3t \end{cases}$$

abbia soluzione, per qualche  $t \in \mathbb{R}$ .

Consideriamo il primo dei due sistemi. Dalla prima equazione si ricava  $t = 1$ , valore che sostituito nelle equazioni seguenti le soddisfa identicamente, quindi  $B \in r$ .

Similmente, dalla prima equazione del secondo sistema si ricava  $t = -1$ , valore che sostituito nella terza equazione dà l'identità numerica  $1 = 6$  che, ovviamente, non è verificata: concludiamo che  $C \notin r$ . ♠

⚠ **Le equazioni parametriche di una retta non sono uniche!** Infatti esse dipendono sia dalla scelta di un suo punto, che di un vettore non nullo ad essa parallelo. Di punti su una retta ne esistono infiniti, così come sono infiniti i vettori ad essa paralleli. Questa infinità di possibili scelte ci permette di rappresentare una stessa retta con sistemi di equazioni parametriche anche molto diversi: per tale motivo non si dovrebbe mai scrivere “le equazioni parametriche di  $r$  sono...”, bensì “**delle** equazioni parametriche di  $r$  sono...”.

**Esempio 9.2.** In  $S_3$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  e si considerino la retta  $r$  dell'Esempio 9.1 e la retta  $r'$  di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 0 \\ z = 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si ha che  $r \parallel r'$ : infatti  $r$  è parallela al vettore  $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$ , mentre  $r'$  è parallela a  $\vec{w} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$ , che sono paralleli fra loro. ♠

**Esempio 9.3.** In  $S_3$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  e si consideri la retta  $s$  di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 2 \\ z = 6t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tale retta passa per il punto  $B = (3, 2, 0)$  ed è parallela al vettore  $\vec{w} = -4\vec{i} + 6\vec{k}$ .

Ricordando l'Esempio 9.1 segue che  $s$  ha in comune con la retta  $r$  di equazioni (9.1.3) il punto  $B$  ed è ad essa parallela, perché  $\vec{w} = -4\vec{i} + 6\vec{k} = -2(2\vec{i} - 3\vec{k}) = -2\vec{v}$ . Due rette parallele ed incidenti devono coincidere, cioè  $s = r$ : questa uguaglianza non è immediatamente deducibile dall'analisi dei sistemi di equazioni che definiscono  $r$  ed  $s$ . ♠

⚠ Più in generale, dal confronto delle equazioni parametriche di due rette, si può dedurre la loro *posizione relativa*. Vedremo in dettaglio come fare nel paragrafo 10.4.

Ricordiamo che due rette  $r, s \subseteq S_3$  possono essere *complanari*, cioè contenute in uno stesso piano, e in particolare

- *coincidenti*,
- *incidenti* in un unico punto,
- *parallele distinte*;


oppure due rette possono essere *non complanari* (dette anche *sghembe*), cioè non essere nè parallele, nè incidenti.

**Osservazione 9.4.** Le equazioni (9.1.2) della retta  $r$  possono essere pensate come leggi orarie del moto di un punto  $P$  lungo la retta  $r$  con posizione iniziale  $R = (x_0, y_0, z_0)$  e velocità costante  $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ . Questo punto di vista può essere molto utile nell'affrontare problemi di incidenza fra rette date tramite equazioni parametriche, come nell'esempio seguente.

**Esempio 9.5.** Si consideri la retta  $r$  dell'Esempio 9.1 e la retta  $s$  di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2 - t \\ z = 6 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (9.1.4)$$

La retta  $s$  è parallela al vettore  $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ; poiché invece  $r$  è parallela a  $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ , deduciamo che  $r \nparallel s$ . Ci domandiamo allora se  $r$  ed  $s$  siano incidenti oppure sghembe.

 Un primo approccio (sbagliato) che può venire in mente è il seguente: conosciamo le coordinate del punto generico su  $r$  e su  $s$  in funzione di un parametro, quindi basta eguagliare tali coordinate e vedere se il sistema così ottenuto ha soluzione o no: se sì allora  $r \cap s \neq \emptyset$ , se no  $r \cap s = \emptyset$ . Bisogna fare però attenzione a come si traduce praticamente tale approccio. Infatti se semplicemente eguagliamo le equazioni (9.1.3) alle equazioni (9.1.4) otteniamo

$$\begin{cases} 1 + 2t = t - 1 \\ 2 = 2 - t \\ 3 - 3t = 6 + t, \end{cases}$$

che, come è facile verificare, non ha soluzione, dunque sembrerebbe che  $r \cap s = \emptyset$ .

Invece si noti che  $(-1, 2, 6) \in r \cap s$ : infatti si ottiene per  $t = -1$  dalle equazioni (9.1.3) e per  $t = 0$  dalle equazioni (9.1.4). Cosa abbiamo sbagliato?

L'errore sta nel fatto che in realtà non ci siamo domandati se i punti in moto sulle due rette  $r$  ed  $s$  potranno mai passare per uno stesso punto, bensì se ciò accade esattamente nello stesso istante!

Il modo per non sbagliare è quello di misurare i tempi in modo diverso sulle due rette utilizzando, ad esempio, il parametro  $t$  su  $r$  e il parametro  $t'$  su  $s$ : in questo modo il problema si traduce nel sistema

$$\begin{cases} 1 + 2t = t' - 1 \\ 2 = 2 - t' \\ 3 - 3t = 6 + t'. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo  $t' = 0$ : sostituendo nelle rimanenti otteniamo  $t = -1$ . Come visto sopra i valori  $t' = 0$  su  $s$  e  $t = -1$  su  $r$  danno lo stesso punto  $(-1, 2, 6)$ .

Se invece consideriamo la retta  $u$  di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 6 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

ancora  $r \not\parallel u$  e, inoltre, è facile verificare che  $r \cap u = \emptyset$ , poiché il sistema

$$\begin{cases} 1 + 2t = t' \\ 2 = 2 - t' \\ 3 - 3t = 6 + t', \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}.$$

non è compatibile: concludiamo che  $r$  ed  $u$  sono sghembe. ♠

Per concludere questa trattazione delle equazioni parametriche di rette nello spazio, ricordiamo che è noto dalla geometria euclidea che per descrivere una retta  $r$  è sufficiente individuare due punti distinti  $A$  e  $B$  che le appartengono; in tal caso è facile ricondursi al caso precedente di un punto e un vettore parallelo. Infatti un punto, per esempio  $A$ , lo abbiamo; per costruire un vettore parallelo a  $r$  basta considerare  $B - A$ , come si vede nella Figura 9.3.

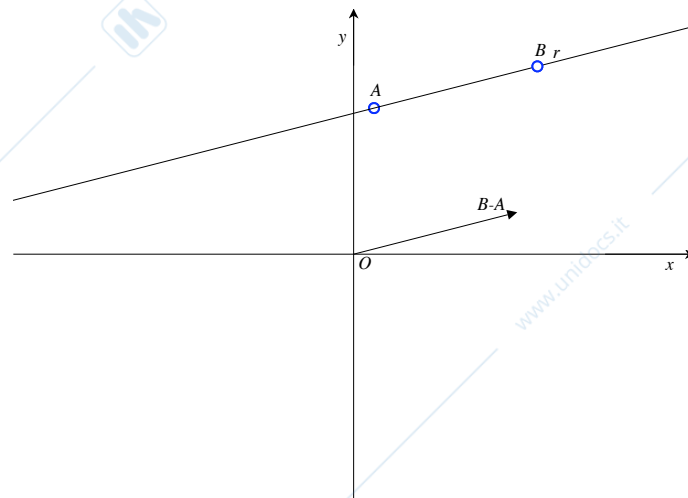


Figura 9.3

Se fissiamo un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  in  $S_3$  in cui i due punti hanno coordinate  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$ , allora sostituendo nell'equazione (9.1.2) otteniamo le equazioni parametriche della retta  $r$  passante per i due punti  $A$  e  $B$ :

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

che come prima si può scrivere sinteticamente anche come  $P = (1-t)A + tB$ .

Si noti che anche in  $S_3$  un punto  $P = (x, y)$  appartiene ad  $\overline{AB}$  se e solo se

$$\begin{cases} x = (1-t)x_A + tx_B \\ y = (1-t)y_A + ty_B \\ z = (1-t)z_A + tz_B, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Ad esempio il punto medio  $M$  del segmento  $\overline{AB}$  ha coordinate corrispondenti a  $t = 1/2$ , cioè

$$M = \left( \frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2} \right).$$

**Esempio 9.6.** Fissiamo un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  in  $S_3$ . Siano  $A = (1, 2, -3)$ ,  $B = (2, 1, 1)$ : chiaramente  $A \neq B$ , quindi esiste unica una retta  $r$  contenente  $A$  e  $B$  le cui equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 4t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad \spadesuit$$

**Osservazione 9.7 (Equazioni parametriche di rette nel piano).** Tramite l'identificazione del piano  $S_2$  col piano di  $S_3$  di equazione  $z = 0$ , dalle equazioni (9.1.2) possiamo ricavare come caso particolare le equazioni di una retta  $r \subset S_2$  nel piano. Infatti intersecando le equazioni (9.1.2) con l'equazione  $z = 0$  otteniamo

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (9.1.5)$$

Le equazioni (9.1.5) sono dette *equazioni parametriche della retta  $r$  passante per il punto  $R = (x_0, y_0)$  e parallela al vettore  $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j}$* .

Un'altra possibilità per ricavare queste stesse equazioni sarebbe stata quella di procedere in  $S_2$  analogamente a quanto fatto in  $S_3$ : infatti possiamo caratterizzare i punti di  $r$  osservando che essa è sempre parallela ad un'unica retta passante per l'origine  $r'$  (che ha direzione  $\vec{v}$ ) e rimane completamente individuata da essa e da un punto qualsiasi  $R \in r$ .

Fissiamo adesso un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O\vec{i}\vec{j}$  in  $S_2$ , e supponiamo che in tale sistema il punto  $R$  abbia coordinate  $R = (x_0, y_0)$  (quindi  $\overrightarrow{OP} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ ) e che  $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j}$ . Se indichiamo con  $(x, y)$  le coordinate del punto generico  $P \in S_2$ , si ha  $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , dunque l'equazione (9.1.5) diventa

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + t(l\vec{i} + m\vec{j}),$$

per qualche valore di  $t \in \mathbb{R}$ , oppure, eguagliando le componenti dei due vettori lungo gli assi coordinati,

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (9.1.5)$$

cioè le stesse equazioni che già avevamo trovato sopra.

Viceversa, come nel caso di  $S_3$ , possiamo dimostrare che, fissato in  $S_2$  un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}$ , ogni retta può essere descritta mediante un sistema di equazioni della forma (9.1.5) con  $l, m$  non entrambi nulli e, viceversa, ogni sistema di equazioni della forma (9.1.5) con  $l, m$  non entrambi nulli rappresenta una retta.

Ad esempio, la retta  $r \subset S_2$  parallela al vettore  $\vec{v} = (2, 4)$  e passante per il punto  $R = (-1, -1)$  ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + 4t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il lettore dimostri che le equazioni

$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 3 + 2t', \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R},$$

descrivono anch'esse la retta parallela a  $\vec{v} = (2, 4)$  e passante per  $R = (-1, -1)$ .

Anche in questo caso possiamo descrivere una retta  $r \subset S_2$  a partire da due punti distinti  $A$  e  $B$  che le appartengono. Come nel caso precedente, un punto, per esempio  $A$ , lo abbiamo, mentre per costruire un vettore parallelo a  $r$  basta considerare  $B - A$ .

Se fissiamo un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}$  in  $S_2$  nel quale  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ , otteniamo le *equazioni parametriche della retta  $r$  passante per i due punti  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$* :

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

o anche

$$\begin{cases} x = (1 - t)x_A + tx_B \\ y = (1 - t)y_A + ty_B, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Queste equazioni si scrivono sinteticamente nella forma  $P = (1 - t)A + tB$ .

Si noti che un punto  $P = (x, y)$  appartiene al segmento  $\overline{AB}$  se e solo se

$$\begin{cases} x = (1 - t)x_A + tx_B \\ y = (1 - t)y_A + ty_B, \end{cases} \quad t \in [0, 1],$$

o, equivalentemente, se

$$\begin{cases} x = \lambda x_A + \mu x_B \\ y = \lambda y_A + \mu y_B, \end{cases} \quad \lambda, \mu \geq 0, \quad \lambda + \mu = 1.$$

Anche in questo caso, quindi, il punto medio  $M$  del segmento  $\overline{AB}$  ha coordinate corrispondenti a  $t = 1/2$ , cioè

$$M = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

## 9.2 Equazioni parametriche di piani

Sia  $\alpha \subseteq S_3$  un piano nello spazio euclideo: esso è sempre parallelo ad un'unico piano passante per l'origine  $\alpha'$  e rimane dunque completamente individuato da esso e da un punto qualsiasi  $A \in \alpha$ , come si può vedere nella Figura 9.4. Per descrivere  $\alpha$  è quindi necessario descrivere  $\alpha'$ .

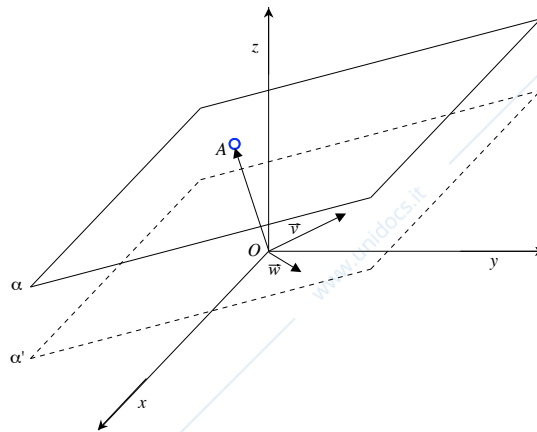


Figura 9.4

Siano  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  due vettori contenuti in  $\alpha'$  e non paralleli: dalla Proposizione 7.15, che caratterizza i vettori complanari, segue che un punto  $P'$  appartiene ad  $\alpha'$  se e solo se esistono  $t, u \in \mathbb{R}$  tali che  $\overrightarrow{OP'} = t\vec{v} + u\vec{w}$ .

Sia ora  $P \in \alpha$  un punto qualsiasi. Per definizione si ha

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = P - A,$$

quindi  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + (P - A)$ . Poiché  $P - A$  è parallelo al segmento  $\overline{PA}$ , dunque a  $\alpha$ , esso è contenuto in  $\alpha'$ , quindi esistono, per quanto osservato sopra, dei valori di  $t, u \in \mathbb{R}$  tali che  $P - A = t\vec{v} + u\vec{w}$ . In conclusione un punto  $P \in S_3$  giace sul piano  $\alpha$  se e solo se

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v} + u\vec{w} \quad (9.2.1)$$

per un qualche  $t, u \in \mathbb{R}$ , come si può osservare nella Figura 9.5.

Fissiamo ora un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  in  $S_3$ , nel quale  $A = (x_A, y_A, z_A)$ , sicché  $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$ ,  $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ , e  $\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$ . Se indichiamo con  $(x, y, z)$  le coordinate del punto generico  $P \in S_3$  si ha  $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , dunque l'equazione (9.2.1) diventa

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k} + t(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) + u(w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}), \quad t, u \in \mathbb{R},$$

o, eguagliando le componenti dei due vettori lungo gli assi coordinati,

$$\begin{cases} x = x_A + v_x t + w_x u \\ y = y_A + v_y t + w_y u \\ z = z_A + v_z t + w_z u, \end{cases} \quad t, u \in \mathbb{R}. \quad (9.2.2)$$

Le equazioni (9.2.2) sono dette *equazioni parametriche del piano*  $\alpha$  passante per il punto  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e parallelo ai vettori  $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ ,  $\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}$ .

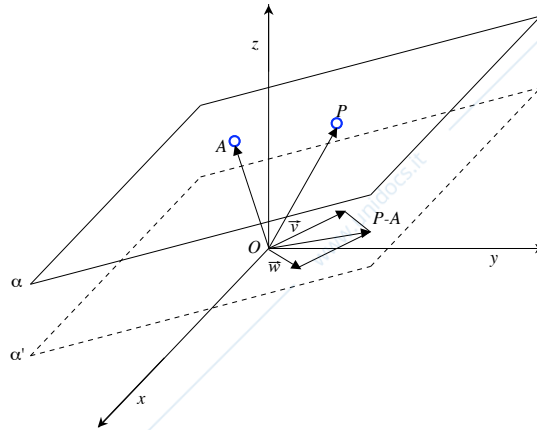


Figura 9.5

Viceversa, supponiamo di avere fissato in  $S_3$  un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ . Dati numeri reali fissati  $x_A, y_A, z_A, v_x, v_y, v_z, w_x, w_y, w_z$ , si consideri il luogo  $\alpha$  dei punti dello spazio  $P = (x, y, z)$  le cui coordinate sono della forma

$$\begin{cases} x = x_A + v_x t + w_x u \\ y = y_A + v_y t + w_y u \\ z = z_A + v_z t + w_z u, \end{cases}$$

al variare di due parametri  $t, u \in \mathbb{R}$ . Procedendo come nel caso della retta, è facile verificare che tale luogo è il piano  $\alpha$  passante per il punto  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e parallelo ai vettori  $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ ,  $\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}$ .

**Esempio 9.8.** In  $S_3$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  e siano  $A = (1, 2, 3) \in S_3$  un punto e  $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$ ,  $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \in V_3(O)$  due vettori. I vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  non sono paralleli, quindi i dati individuano un piano  $\alpha$  le cui equazioni parametriche sono date da

$$\begin{cases} x = 1 + 2t + u \\ y = 2 + u \\ z = 3 - 3t + u, \end{cases} \quad t, u \in \mathbb{R}. \quad (9.2.3)$$

Si noti che la retta  $r$  dell'Esempio 9.1 di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 3 - 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

giace su  $\alpha$ : infatti i suoi punti si ottengono ponendo  $u = 0$  in (9.2.3). ♠

Per concludere il paragrafo, osserviamo come ricondurci al caso precedente se ci viene chiesto di descrivere un piano  $\alpha$  a partire da tre suoi punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  non allineati, cosa che è noto essere possibile dalla geometria euclidea. Un punto, per esempio  $A$ , l'abbiamo: per costruire due vettori paralleli a  $\alpha$  basta considerare  $B - A$  e  $C - A$ . Se rispetto al sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  fissato in  $S_3$  i punti hanno coordinate  $A = (x_A, y_A, z_A)$ ,  $B = (x_B, y_B, z_B)$ ,  $C = (x_C, y_C, z_C)$ , allora

$$B - A = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k},$$

$$C - A = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} + (z_C - z_A)\vec{k}.$$

Sostituendo nell'equazione (9.2.2) otteniamo le *equazioni parametriche del piano  $\alpha$  passante per i tre punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$* :

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t + (x_C - x_A)u \\ y = y_A + (y_B - y_A)t + (y_C - y_A)u \\ z = z_A + (z_B - z_A)t + (z_C - z_A)u, \end{cases} \quad t, u \in \mathbb{R},$$

oppure

$$\begin{cases} x = (1 - t - u)x_A + tx_B + ux_C \\ y = (1 - t - u)y_A + ty_B + uy_C \\ z = (1 - t - u)z_A + tz_B + uz_C \end{cases} \quad t, u \in \mathbb{R}. \quad (9.2.4)$$

Possiamo anche scrivere sinteticamente le equazioni nella forma

$$P = (1 - t)A + tB + uC \quad t, u \in \mathbb{R}.$$

Se poi vogliamo descrivere le coordinate dei punti del triangolo  $\Delta_{ABC}$  è sufficiente che ci limitiamo a considerare i punti le cui coordinate si possono esprimere tramite la formula (9.2.4) con  $t, u \in [0, 1]$  e  $t + u \leq 1$ , cioè  $P = (x, y, z) \in \Delta_{ABC}$  se e solo se

$$\begin{cases} x = (1 - t - u)x_A + tx_B + ux_C \\ y = (1 - t - u)y_A + ty_B + uy_C \\ z = (1 - t - u)z_A + tz_B + uz_C \end{cases} \quad t, u, t + u \in [0, 1],$$

o, equivalentemente, se

$$\begin{cases} x = \lambda x_A + \mu x_B + \nu x_C \\ y = \lambda y_A + \mu y_B + \nu y_C \\ z = \lambda z_A + \mu z_B + \nu z_C \end{cases} \quad \lambda, \mu, \nu \geq 0, \quad \lambda + \mu + \nu = 1.$$

**Esempio 9.9.** In un sistema di riferimento fissato  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  in  $S_3$  si considerino i tre punti  $A = (1, 2, -3)$ ,  $B = (2, 1, 1)$ ,  $C = (2, 2, 2)$ . Chiaramente  $A \neq B$ , quindi esiste unico un piano  $\alpha$  contenente  $A$ ,  $B$  e  $C$  le cui equazioni parametriche si ottengono utilizzando la formula (9.2.4)

$$\begin{cases} x = 1 + t + u \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 4t + 5u, \end{cases} \quad t, u \in \mathbb{R}. \quad \spadesuit$$