# Lezione 8

## 8.1 Prodotto scalare

**Definizione 8.1 (Prodotto scalare).** Sia fissato un sistema di riferimento $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$ in $S_3$ e siano $\vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$ due vettori, $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$ e $\vec{w} = w_x\vec{\imath} + w_y\vec{\jmath} + w_z\vec{k}$.

Il *prodotto scalare di $\vec{v}$ e $\vec{w}$* è il numero

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z. \tag{8.1.1}$$

Confrontando la definizione di prodotto scalare con la Formula (7.3.1) otteniamo

$$|\vec{v}| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}. \tag{8.1.2}$$

⚠ Testi diversi utilizzano notazioni diverse per denotare il prodotto scalare di due vettori, non solo $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, ma anche $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e $(\vec{v}, \vec{w})$.

**Esempio 8.2.** Si considerino i vettori $\vec{\imath} = 1\vec{\imath}+0\vec{\jmath}+0\vec{k}$, $\vec{\jmath} = 0\vec{\imath}+1\vec{\jmath}+0\vec{k}$, $\vec{k} = 0\vec{\imath}+0\vec{\jmath}+1\vec{k}$. Si ha

$$\langle \vec{\imath}, \vec{\imath} \rangle = \langle \vec{\jmath}, \vec{\jmath} \rangle = \langle \vec{k}, \vec{k} \rangle = 1,$$

$$\langle \vec{\imath}, \vec{\jmath} \rangle = \langle \vec{\jmath}, \vec{\imath} \rangle = \langle \vec{\imath}, \vec{k} \rangle = \langle \vec{k}, \vec{\imath} \rangle = \langle \vec{\jmath}, \vec{k} \rangle = \langle \vec{k}, \vec{\jmath} \rangle = 0.$$

Si considerino poi i due vettori $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ e $\vec{w} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$. Si ha

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 1.$$ ♠

Dalle proprietà del prodotto tra matrici seguono immediatamente una serie di proprietà del prodotto scalare.

**Proposizione 8.3 (Proprietà del prodotto scalare).** *Valgono le seguenti proprietà:*

(PSVG1) *per ogni $\vec{v}, \vec{w} \in V_n(O)$, si ha $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ (proprietà commutativa);*

(PSVG2) *per ogni $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_n(O)$, si ha $\langle \vec{u}, \vec{v}+\vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ (proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori);*

(PSVG3) *per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}, \vec{w} \in V_n(O)$, si ha $\alpha\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \alpha\vec{v}, \vec{w} \rangle$;*

(PSVG4) *per ogni $\vec{v} \in V_n(O) \setminus \{\vec{0}\}$, si ha $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ (il prodotto scalare è definito positivo).*

Le proprietà (PSVG2) e (PSVG3) vengono solitamente dette *proprietà di bilinearità del prodotto scalare.*

Si noti che le componenti di un vettore rispetto ad un sistema di riferimento si descrivono facilmente in termini di prodotti scalari. Infatti se $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$ si definiscono i *coefficienti di Fourier di $\vec{v}$ rispetto al sistema di riferimento $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$* come

$$v_x = \langle \vec{v}, \vec{\imath} \rangle, \qquad v_y = \langle \vec{v}, \vec{\jmath} \rangle, \qquad v_z = \langle \vec{v}, \vec{k} \rangle,$$

da cui otteniamo la decomposizione

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{\imath} \rangle\, \vec{\imath} + \langle \vec{v}, \vec{\jmath} \rangle\, \vec{\jmath} + \langle \vec{v}, \vec{k} \rangle\, \vec{k}.$$

Questo ci fornisce un metodo relativamente semplice per determinare la decomposizione di un vettore rispetto ad un nuovo sistema di riferimento.

La seguente interpretazione geometrica mostra che il prodotto scalare è indipendente dal sistema di riferimento scelto e dipende solo dai vettori coinvolti. A tale scopo introduciamo la definizione di angolo fra vettori, illustrato qui sotto nella Figura 8.1.

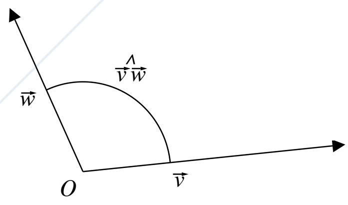


Figura 8.1

**Definizione 8.4 (Angolo tra due vettori).** Sia fissato un sistema di riferimento in $S_3$ e siano $\vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$ vettori non nulli.

- Se $\vec{v} \nparallel \vec{w}$ definiamo *angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$* la misura in radianti $\widehat{\vec{v}\vec{w}} \in ]0, \pi[$ dell'angolo del piano individuato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ed avente per lati le semirette contenenti i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;
- se $\vec{v} \parallel \vec{w}$ sono concordi definiamo $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = 0$;
- se $\vec{v} \parallel \vec{w}$ sono discordi definiamo $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = \pi$.

Con tale nozione possiamo enunciare la seguente proposizione.

**Proposizione 8.5.** *Sia fissato un sistema di riferimento in $S_3$ e siano $\vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$ vettori. Allora o almeno uno dei due vettori è nullo e si ha $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$, oppure sono entrambi non nulli e si ha $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}||\vec{w}| \cos(\widehat{\vec{v}\vec{w}})$.*

*Dimostrazione.* Siano $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$ e $\vec{w} = w_x\vec{\imath} + w_y\vec{\jmath} + w_z\vec{k}$. Se almeno uno dei due vettori, ad esempio $\vec{v}$, è nullo, allora applicando la definizione di prodotto scalare

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \cdot w_x + 0 \cdot w_y + 0 \cdot w_z = 0.$$

Supponiamo quindi che i vettori siano entrambi non nulli; se sono anche paralleli, in base alla definizione, è facile verificare la tesi. Supponiamo allora che i vettori $\vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$ non siano paralleli, come illustrato nella Figura 8.2.

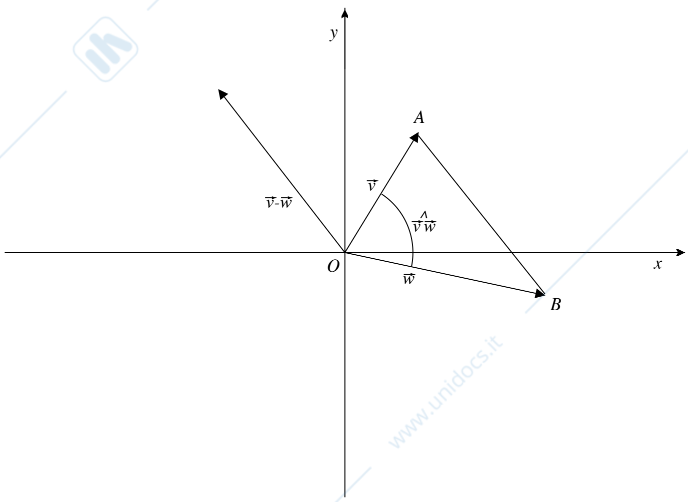


Figura 8.2

Per il Teorema di Carnot, ricordando il significato geometrico di differenza di vettori applicati, si ha che $|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{w}| \cos(\widehat{\vec{v}\vec{w}})$, quindi

$$|\vec{v}||\vec{w}| \cos(\widehat{\vec{v}\vec{w}}) = \frac{1}{2}(|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - |\vec{v} - \vec{w}|^2).$$

Ricordando la formula (7.3.1),

$$|\vec{v}|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \qquad |\vec{w}|^2 = x_w^2 + y_w^2 + z_w^2,$$

$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = (x_v - x_w)^2 + (y_v - y_w)^2 + (z_v - z_w)^2.$$

Sostituendo queste espressioni nella formula sopra otteniamo $|\vec{v}||\vec{w}| \cos(\widehat{\vec{v}\vec{w}}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. □

Dalla Proposizione 8.5 segue immediatamente che $\langle \vec{\imath}, \vec{\imath} \rangle = \langle \vec{\jmath}, \vec{\jmath} \rangle = \langle \vec{k}, \vec{k} \rangle = 1$, $\langle \vec{\imath}, \vec{\jmath} \rangle = \langle \vec{\jmath}, \vec{\imath} \rangle = \langle \vec{\imath}, \vec{k} \rangle = \langle \vec{k}, \vec{\imath} \rangle = \langle \vec{\jmath}, \vec{k} \rangle = \langle \vec{k}, \vec{\jmath} \rangle = 0$ come già verificato nell'Esempio 8.2.

Facciamo ora alcune considerazioni; una prima osservazione importantissima è che il prodotto $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ è nullo se e solo se o almeno uno dei due vettori è nullo oppure se $\cos(\widehat{\vec{v}\vec{w}}) = 0$, cioè se $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = \pi/2$.

**Definizione 8.6 (Vettori perpendicolari).** Due vettori $\vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$ si dicono *perpendicolari* (o *ortogonali*) se e solo se $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$. Se $\vec{v}$ è perpendicolare a $\vec{w}$ scriviamo $\vec{v} \perp \vec{w}$.

**Osservazione 8.7.** Se $\vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$ sono entrambi non nulli,

$$\cos(\widehat{\vec{v}\vec{w}}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{v}||\vec{w}|},$$

quindi il segno del prodotto scalare $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ è esattamente il segno di $\cos(\widehat{\vec{v}\vec{w}})$: in particolare $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle > 0$ se e solo se $\widehat{\vec{v}\vec{w}} \in [0, \pi/2[$, cioè se e solo se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formano un angolo acuto, mentre $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle < 0$ se e solo se $\widehat{\vec{v}\vec{w}} \in ]\pi/2, \pi]$, cioè se e solo se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formano un angolo ottuso.

**Esempio 8.8.** Si considerino i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dell'Esempio 8.2. Poiché $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 1$ i due vettori formano un angolo acuto: precisamente essendo $|\vec{v}| = \sqrt{3}$, $|\vec{w}| = \sqrt{11}$ si ha $\cos(\widehat{\vec{v}\vec{w}}) = 1/\sqrt{33}$.

Invece i vettori $\vec{v}' = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ e $\vec{w}' = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ sono perpendicolari: infatti $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 0$. ♠

**Osservazione 8.9 (Disuguaglianze: Cauchy–Schwartz e triangolare).** Dal momento che la funzione coseno è limitata in modulo da 1, come corollario immediato della Proposizione 8.5 osserviamo che, dati i vettori $\vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$, vale la cosidetta *disuguaglianza di Cauchy–Schwartz*

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leqslant |\vec{v}||\vec{w}|, \tag{8.1.3}$$

in cui si ha l'uguaglianza se e solo se i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli.

Inoltre, applicando le proprietà (PSVG1) e (PSVG2) della Proposizione 8.3 si ha che

$$\begin{aligned} |\vec{v} + \vec{w}|^2 &= \langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} + \vec{w} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} + \vec{w} \rangle \\ &= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}|^2 + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + |\vec{w}|^2 \\ &\leqslant |\vec{v}|^2 + 2|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| + |\vec{w}|^2 \leqslant |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v}||\vec{w}| + |\vec{w}|^2 = (|\vec{v}| + |\vec{w}|)^2. \end{aligned}$$

Poiché $|\vec{v} + \vec{w}|$ e $|\vec{v}| + |\vec{w}|$ sono quantità non negative, la catena di diseguaglianze sopra dimostra la *disuguaglianza triangolare*

$$|\vec{v} + \vec{w}| \leqslant |\vec{v}| + |\vec{w}|, \tag{8.1.4}$$

in cui vale l'uguaglianza se e solo se i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli e concordi oppure almeno uno di loro è nullo.

Una conseguenza diretta della disuguaglianza triangolare è che per ogni $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vale anche

$$||\vec{v}| - |\vec{w}|| \leqslant |\vec{v} - \vec{w}|,$$

che equivale a dire che in un triangolo ogni lato è maggiore della differenza degli altri due.

**Osservazione 8.10 (Proiezione ortogonale).** Il prodotto scalare è legato anche a un'altra nozione geometrica: la proiezione ortogonale. Osservando la Figura 8.3 è facile vedere che, dati due vettori $\vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$, la quantità $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ coincide con il prodotto della lunghezza di $\vec{v}$ per la lunghezza della proiezione di $\vec{w}$ lungo la direzione di $\vec{v}$ (o viceversa).

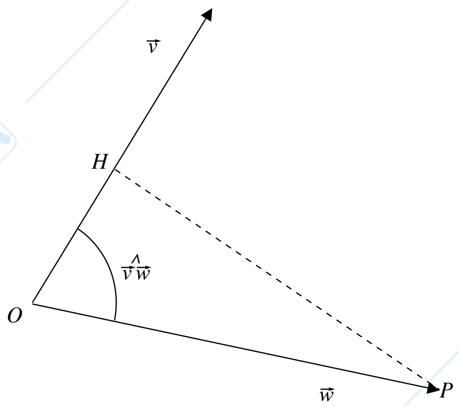


Figura 8.3

In particolare se si desidera determinare il vettore $\vec{w}_{\|} = \overrightarrow{OH}$ proiezione di $\vec{w}$ lungo la direzione di $\vec{v}$ è sufficiente applicare la formula

$$\begin{aligned}\vec{w}_{\|} = |\vec{w}|\cos(\widehat{\vec{v}\vec{w}})\,\mathrm{vers}(\vec{v}) &= \frac{|\vec{w}||\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{v}\vec{w}})}{|\vec{v}|}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\ &= \frac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{|\vec{v}|}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}\vec{v}.\end{aligned} \tag{8.1.5}$$

Il vettore $\vec{w}_{\|}$ è detto *proiezione ortogonale di $\vec{w}$ lungo la direzione di $\vec{v}$.*

Si noti che il triangolo $\Delta_{OHP}$ è rettangolo in $H$, dunque, ricordando il significato geometrico di differenza di vettori, il vettore

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \vec{w}_{\|} = \vec{w} - \frac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}\vec{v}$$

è perpendicolare a $\vec{w}_{\|}$: in particolare questo ci dà un metodo per decomporre un vettore lungo due direzioni perpendicolari di cui una fissata, poiché $\vec{w} = \vec{w}_{\|} + \vec{w}_{\perp}$.

**Esempio 8.11.** Si considerino i vettori $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$; vogliamo determinare la proiezione $\vec{w}_{\|}$ di $\vec{w}$ lungo la direzione di $\vec{v}$. Si ha

$$\vec{w}_{\|} = \frac{\langle\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}, \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}\rangle}{\langle\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}, \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}\rangle}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}) = -\frac{4}{3}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}).$$

Possiamo decomporre $\vec{w} = \vec{w}_{\|} + \vec{w}_{\perp}$, dove

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \vec{w}_{\|} = \frac{1}{3}(7\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}) \perp \vec{w}_{\|}.$$

♠

## 8.2 Prodotto vettoriale

**Definizione 8.12 (Prodotto vettoriale).** Fissato un sistema di riferimento $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$ in $S_3$, siano $\vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$ due vettori, $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$ e $\vec{w} = w_x\vec{\imath} + w_y\vec{\jmath} + w_z\vec{k}$.

Il *prodotto vettoriale di* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ è il vettore di $V_3(O)$

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_y w_z - v_z w_y)\,\vec{\imath} - (v_x w_z - v_z w_x)\,\vec{\jmath} + (v_x w_y - v_y w_x)\,\vec{k}. \tag{8.2.1}$$

La formula (8.2.1) sopra è un po' difficile da ricordare. Si noti che i coefficienti di $\vec{v} \times \vec{w}$ sono esattamente i determinanti delle sottomatrici $2 \times 2$ della matrice

$$\begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix},$$

con segni alternati!

Un artificio utile per ricordarsi la formula (8.2.1) può, quindi, essere quello di utilizzare proprio la nozione di determinante scrivendo

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Spesso, ricordando la definizione di determinante di una matrice $3 \times 3$, si utilizza anche la notazione

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

⚠ Testi diversi utilizzano notazioni diverse per denotare il prodotto vettoriale, non solo $\vec{v} \times \vec{w}$, ma anche $\vec{v} \wedge \vec{w}$ e, più raramente, $[\vec{v}, \vec{w}]$.

**Esempio 8.13.** Consideriamo i vettori dell'Esempio 8.2. Poiché $\vec{\imath} = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}$, $\vec{\jmath} = 0\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 0\vec{k}$, $\vec{k} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 1\vec{k}$ si ha

$$\begin{aligned}
\vec{\imath} \times \vec{\imath} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{0}, \\
\vec{\imath} \times \vec{\jmath} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{k}, \\
\vec{\imath} \times \vec{k} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{\jmath}.
\end{aligned}$$

Il lettore verifichi in modo analogo che $\vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$, $\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$, $\vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$, $\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$.

Un buon metodo per ricordarsi le relazioni appena viste è quello di considerare la figura

$$\begin{tikzcd}
\vec{\imath} \arrow[rr, bend left] & & \vec{\jmath} \arrow[dl, bend left] \\
& \vec{k} \arrow[ul, bend left] &
\end{tikzcd}$$

dove procedendo "in senso orario" si trovano relazioni col segno $+$, mentre procedendo in senso anti-orario si trovano relazioni col segno $-$.

Si considerino poi i due vettori $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ e $\vec{w} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$. Allora

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 0\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 4\vec{k}.$$

Si verifichi per esercizio che $\vec{w} \times \vec{v} = 4\vec{\jmath} + 4\vec{k} = -\vec{v} \times \vec{w}$. ♠

Una conseguenza quasi immediata della definizione algebrica di prodotto vettoriale è la seguente Proposizione.

**Proposizione 8.14 (Proprietà del prodotto vettoriale).** *Nello spazio dei vettori applicati $V_n(O)$, $n = 2, 3$, valgono le seguenti proprietà:*

(PV1) *per ogni $\vec{v}, \vec{w} \in V_n(O)$, si ha $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$ (proprietà anticommutativa);*

(PV2) *per ogni $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_n(O)$, si ha $(\vec{u}+\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ (proprietà distributiva a destra rispetto alla somma);*

(PV3) *per ogni $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_n(O)$, si ha $\vec{u} \times (\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ (proprietà distributiva a sinistra rispetto alla somma);*

(PV4) *per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}, \vec{w} \in V_n(O)$, si ha $\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (\alpha\vec{w})$.*

☠ Il prodotto vettoriale non è associativo: infatti, ad esempio,

$$(\vec{\imath} \times \vec{\imath}) \times \vec{\jmath} = \vec{0} \neq -\vec{\jmath} = \vec{\imath} \times \vec{k} = \vec{\imath} \times (\vec{\imath} \times \vec{\jmath}).$$

Le proprietà della Proposizione 8.14 e la tabella di moltiplicazione dei vettori $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ determinata nell'Esempio 8.13 ci permettono di calcolare il prodotto vettoriale di due vettori anche senza ricordarne la definizione.

**Esempio 8.15.** Si considerino i vettori $\vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$. Allora

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= (2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}) \times (\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}) \\ &= 2\vec{\imath} \times \vec{\imath} + 2\vec{\imath} \times \vec{\jmath} + 2\vec{\imath} \times \vec{k} + \vec{\jmath} \times \vec{\imath} + \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} + \vec{\jmath} \times \vec{k} - 3\vec{k} \times \vec{\imath} - 3\vec{k} \times \vec{\jmath} - 3\vec{k} \times \vec{k}. \end{aligned}$$

Ricordando le relazioni tra $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ e $\vec{k}$, segue che

$$\vec{v} \times \vec{w} = 2\vec{k} - 2\vec{\jmath} - \vec{k} + \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 3\vec{\imath} = 4\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + \vec{k}.$$ ♠

Come per il prodotto scalare, abbiamo definito la nozione di prodotto vettoriale utilizzando le componenti dei vettori in termini di coordinate rispetto a un certo sistema di riferimento. In realtà il prodotto vettoriale, proprio come quello scalare, è indipendente dal sistema di riferimento scelto e dipende solo dai vettori coinvolti; per dimostrare questa affermazione daremo la sua interpretazione geometrica.

**Proposizione 8.16.** *Fissato un sistema di riferimento in $S_3$, siano $\vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$. Allora o $\vec{v} \parallel \vec{w}$, e si ha $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$, oppure $\vec{v} \nparallel \vec{w}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$ è definito come segue:*

(i) *la sua direzione è perpendicolare al piano contenente i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;*

(ii) *il suo verso è tale che la terna ordinata $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})$ sia orientata secondo la regola della mano destra;*

(iii) $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}| \sin(\widehat{\vec{v}\vec{w}})$.

*Dimostrazione.* Siano $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$ e $\vec{w} = w_x\vec{\imath} + w_y\vec{\jmath} + w_z\vec{k}$. Se $\vec{v} \parallel \vec{w}$ allora in base alla definizione è facile verificare la tesi. Supponiamo allora che i vettori siano entrambi non nulli ed iniziamo a dimostrare (iii). Si ha che

$$|\vec{v}\times\vec{w}|^2 = v_y^2w_z^2 - 2v_yw_zv_zw_y + v_z^2w_y^2 + v_z^2w_x^2 - 2v_z^2w_x^2v_x^2w_z^2 + v_y^2w_z^2 + v_x^2w_z^2 + v_x^2w_y^2 - 2v_xw_yv_yw_x + v_y^2w_x^2.$$

Tenendo conto della definizione geometrica del prodotto scalare, si ha

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2 \sin^2(\widehat{\vec{v}\vec{w}}) &= |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2 - |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2\cos^2(\widehat{\vec{v}\vec{w}}) = |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2 - \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle^2 \\ &= v_y^2w_z^2 - 2v_yw_zv_zw_y + v_z^2w_y^2 + v_z^2w_x^2 - 2v_z^2w_x^2v_x^2w_z^2 \\ &\qquad + v_y^2w_z^2 + v_x^2w_z^2 + v_x^2w_y^2 - 2v_xw_yv_yw_x + v_y^2w_x^2. \end{aligned}$$

Poiché i quadrati delle quantità non negative $|\vec{v} \times \vec{w}|$ e $|\vec{v}||\vec{w}| \sin(\widehat{\vec{v}\vec{w}})$ coincidono, segue (iii).

Dimostriamo adesso (ii), cioè che $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}, \vec{w}$. A tale scopo è sufficiente verificare che $\langle \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}\rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}\rangle = 0$. Risulta, ad esempio,

$$\langle \vec{v}, \vec{v}\times\vec{w}\rangle = \langle \vec{v}, \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}\vec{k}\rangle = v_x\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - v_y\begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + v_z\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} = 0.$$

Si verifichi in modo analogo che $\langle \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}\rangle = 0$.

Omettiamo la dimostrazione di (i) in quanto coinvolge la nozione di “matrice di passaggio fra due basi” che sarà introdotta solo più avanti nel corso. □

La Proposizione 8.16 è bene illustrata dalla Figura 8.4.

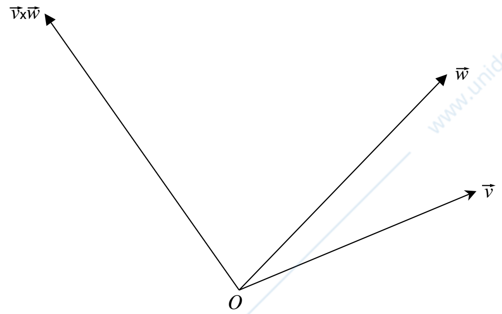


Figura 8.4

Alla luce della Proposizione 8.16 discende immediatamente che

$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} = -\vec{\jmath} \times \vec{\imath}, \qquad \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath} = -\vec{k} \times \vec{\jmath}, \qquad \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} = -\vec{\imath} \times \vec{k},$$

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0},$$

come già verificato nell'Esempio 8.13.

Come nel caso del prodotto scalare anche l'annullarsi del prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$ dà informazioni sulla posizione relativa dei due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$: infatti $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ se e solo se $|\vec{v} \times \vec{w}| = 0$ se e solo se o almeno uno dei due vettori è nullo oppure se $\sin(\widehat{\vec{v}\vec{w}}) = 0$, cioè se $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = 0, \pi$, cioè se e solo se $\vec{v} \parallel \vec{w}$.

⚠ Utilizzare questo metodo per verificare il parallelismo di vettori è però senza dubbio molto più oneroso che applicare la Proposizione 7.16.

**Osservazione 8.17** (**Prodotto vettoriale e area**). Il prodotto vettoriale, o meglio il suo modulo, è legato alla nozione di area. Si considerino tre punti non allineati $A, B, C \in S_3$ e si consideri il triangolo $\Delta_{ABC}$ avente tali punti come vertici, come nella Figura 8.5.

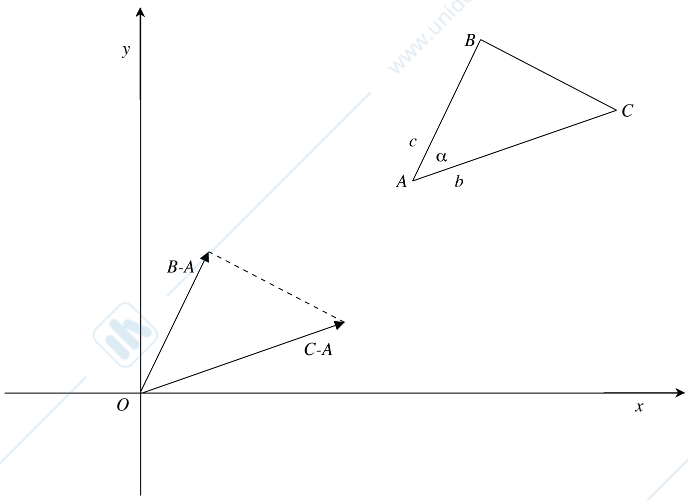


Figura 8.5

Allora è noto dalla trigonometria elementare che la sua area è

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}(bc \sin\alpha),$$

ove $b$ e $c$ sono le lunghezze dei lati opposti ai vertici $B$ e $C$ rispettivamente ed $\alpha$ è l'angolo interno con vertice $A$.

D'altra parte il triangolo $\Delta_{ABC}$ è congruente al triangolo avente lati $B - A$ e $C - A$, quindi $b = |B - A|$, $c = |C - A|$ e $\alpha = (B - \widehat{A)(C} - A)$. Concludiamo allora che

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Delta_{ABC}) &= \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} |B - A||C - A| \sin\left((B - \widehat{A)(C} - A)\right) \\ &= \frac{1}{2} |(B - A) \times (C - A)|. \end{aligned} \tag{8.2.2}$$

Per esempio se consideriamo un triangolo nel piano di vertici $A, B, C$, con coordinate $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ otteniamo

$$(B-A)\times(C-A) = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \vec{k} = \big((x_B-x_A)(y_C-y_A)-(x_C-x_A)(y_B-y_A)\big)\vec{k},$$

da cui la formula, nota ad alcuni,

$$\text{Area}(\Delta_{ABC}) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}\right|. \tag{8.2.3}$$

⚠ La formula (8.2.3) è valida solo nel caso di triangoli nel piano! Per triangoli nello spazio si deve applicare la formula (8.2.2) per ottenere il valore corretto dell'area.

**Esempio 8.18.** Si considerino i punti $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, -1, 3)$, $C = (-1, 0, 1)$. Allora $B - A = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $C - A = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$: tali vettori non sono proporzionali, quindi i tre punti non sono allineati, quindi definiscono un triangolo. Poiché

$$(B - A) \times (C - A) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 5\vec{k}$$

si ha

$$\text{Area}(\Delta_{ABC}) = \frac{1}{2}|2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 5\vec{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 25} = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

Si noti, a conferma del fatto che la formula (8.2.3) vale **solo** nel piano, che

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2} \neq \text{Area}(\Delta_{ABC}).$$ ♠

## 8.3 Prodotto misto

**Definizione 8.19 (Prodotto misto).** Sia fissato un sistema di riferimento $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$ in $S_3$ e siano dati i tre vettori geometrici $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$.

Il *prodotto misto di* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ è il numero

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle. \tag{8.3.1}$$

Se $\vec{u} = u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath} + u_z\vec{k}$, $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$ e $\vec{w} = w_x\vec{\imath} + w_y\vec{\jmath} + w_z\vec{k}$, tenendo conto delle formule che permettono di calcolare il prodotto scalare ed il prodotto vettoriale, otteniamo

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = u_x \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - u_y \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

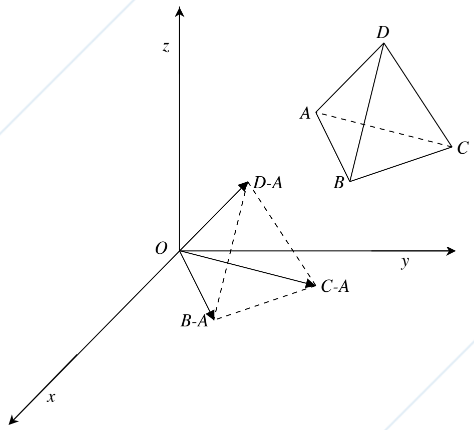


Figura 8.6

Osserviamo che se $\vec{v} \parallel \vec{w}$ allora $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = 0$: in tal caso $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sono ovviamente complanari.

Se invece $\vec{v} \nparallel \vec{w}$, allora $\vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{0}$ e ricordando la Proposizione 8.16 deduciamo che $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = 0$ se e solo se $\vec{u}$ è perpendicolare a $\vec{v} \times \vec{w}$, cioè se e solo se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono complanari.

**Osservazione 8.20** (**Prodotto misto e volume**)**.** Il prodotto misto, o meglio il suo modulo, è legato alla nozione di volume. Si considerino quattro punti non complanari $A, B, C, D \in S_3$ e consideriamo il tetraedro $T_{ABCD}$ avente tali punti come vertici, come nella Figura 8.6.

Allora è noto dalla geometria elementare che il suo volume è

$$\mathrm{Volume}(T_{ABCD}) = \frac{1}{3}\mathrm{Area}(\Delta_{ABC})h,$$

ove $h$ è l'altezza relativa al vertice $D$ (si veda la Figura 8.6).

D'altra parte sappiamo che

$$\mathrm{Area}(\Delta_{ABC}) = \frac{1}{2}|(B-A) \times (C-A)|,$$

e $h$ non è altro che la lunghezza della proiezione del vettore $D-A$ lungo la direzione perpendicolare al triangolo $\Delta_{ABC}$, che è la direzione del vettore $(B-A) \times (C-A)$: quindi $h = |D-A||\cos\varphi|$ ove $\varphi$ è l'angolo formato dai due vettori $D-A$ e $(B-A) \times (C-A)$. In particolare

$$\begin{aligned}\mathrm{Volume}(ABCD) &= \frac{1}{3}\frac{1}{2}|D-A||(B-A) \times (C-A)||\cos\varphi| = \\ &= \frac{1}{6}|\langle D-A, (B-A) \times (C-A)\rangle|.\end{aligned}$$

**Esempio 8.21.** Si considerino i punti $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, -1, 3)$, $C = (-1, 0, 1)$, $D = (3, 3, 3)$. Allora $B - A = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $C - A = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $D - A = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$: poiché

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che i quattro punti non sono complanari, dunque definiscono un tetraedro e si ha

$$\begin{aligned} \text{Volume}(T_{ABCD}) &= \frac{1}{6} \left| \langle D - A, (B - A) \times (C - A) \rangle \right| = \\ &= \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| -14 \right| = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

♠