

# Lezione 1

## 1.1 Matrici a coefficienti in $\mathbb{R}$

**Definizione 1.1.** Siano  $m, n \in \mathbb{Z}$  numeri interi positivi.

Una *matrice*  $m \times n$  a coefficienti in  $\mathbb{R}$  è un insieme di  $mn$  numeri reali disposti su  $m$  righe ed  $n$  colonne circondata da parentesi tonde. Tali numeri sono detti *entrate*, *coefficienti*, o *componenti* della matrice. L'insieme di tutte le matrici  $m \times n$  a coefficienti in  $\mathbb{R}$  si indica con  $\mathbb{R}^{m,n}$ .

Vi sono alcuni casi particolari che vale la pena evidenziare:

- la matrice  $0_{m,n} \in \mathbb{R}^{m,n}$  avente tutte le entrate nulle viene detta *matrice nulla*;
- se  $m = n$ , cioè se il numero delle righe è uguale al numero delle colonne, la matrice è detta *matrice quadrata*;
- se  $m = 1$  la matrice è detta *matrice riga*, mentre se  $n = 1$  *matrice colonna*;
- se  $m = n = 1$ , cioè quando ci sono una sola riga e una sola colonna (e, quindi, anche una sola entrata), si preferisce identificare  $\mathbb{R}^{1,1}$  con  $\mathbb{R}$ .

**Esempio 1.2.** Diamo alcuni esempi di matrici.

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi \\ -3/19 & \sqrt{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3/19 & 0 \\ \pi & \sqrt{21} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \text{(matrice quadrata)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1} \text{(matrice colonna)}, \quad (1 \ 0) \in \mathbb{R}^{1,2} \text{(matrice riga)}$$

Le matrici nulle  $2 \times 2$  e  $2 \times 3$  sono

$$0_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad 0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6

☠ La tabella

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & & 0 \\ & & 17 & \end{pmatrix}$$

non è una matrice.

⚠ Testi diversi utilizzano notazioni diverse per indicare una matrice! Ad esempio la matrice dell'Esempio 1.2 può essere scritta come

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi \\ -3/19 & \sqrt{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \pi \\ -3/19 & \sqrt{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left\| \begin{array}{cc} 1 & \pi \\ -3/19 & \sqrt{21} \\ 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

La notazione

$$\left\{ \begin{array}{cc} 1 & \pi \\ -3/19 & \sqrt{21} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}$$

è da evitare, perché può creare confusione con quella usata per gli insiemi.

Sia  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  una matrice. Ad ogni sua entrata  $a$  rimangono associati due numeri interi positivi, gli indici  $i$  e  $j$  della riga e della colonna al cui incrocio si trova  $a$ :  $i$  e  $j$  vengono detti rispettivamente *indice di riga* e *indice di colonna* dell'entrata  $a$  e  $a$  si dice *entrata in posizione*  $(i, j)$ .

Spesso, per indicare nelle formule l'entrata in posizione  $(i, j)$  si scrive  $a_{i,j}$ . Similmente la matrice  $A$  si può indicare con la notazione

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Tale notazione significa che  $A$  è la matrice le cui entrate sono i numeri  $a_{i,j}$  con gli indici  $i$  e  $j$  che variano da 1 a  $m$  e da 1 a  $n$  rispettivamente.

Se  $A$  è quadrata con  $m = n$  si può scrivere anche

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Quando le dimensioni della matrice sono fissate, a volte conviene indicare le entrate con lettere distinte. Per esempio, una matrice  $2 \times 2$  generica può essere indifferentemente indicata con

$$(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}, \quad (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}, \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

**Esempio 1.3.** Si considerino le prime due matrici dell'Esempio 1.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ -3/19 & \sqrt{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3/19 & 0 \\ \pi & \sqrt{21} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}.$$

L'entrata  $(1, 2)$  di  $A$  è  $a_{1,2} = \pi$ . Le entrate  $(3, 1)$  e  $(3, 2)$  di  $A$  sono  $a_{3,1} = a_{3,2} = 0$ . Invece le entrate  $(3, 3)$  e  $(2, 3)$  non esistono.

Analogamente, le entrate  $(3, 1)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(3, 3)$  di  $B$  non esistono. Invece le entrate  $(1, 2)$  e  $(2, 3)$  di  $B$  sono  $b_{1,2} = -3/19$  e  $b_{2,3} = 0$ . ♠

**Definizione 1.4 (Opposto di una matrice).** Sia  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  una matrice.

L'opposto di  $A$  è la matrice di  $\mathbb{R}^{m,n}$ , indicata con  $-A$ , la cui entrata  $(i, j)$  coincide con l'opposto dell'entrata  $(i, j)$  della matrice  $A$ , per  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ .

Se  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{R}^{m,n}$  si scrive in simboli  $-A = (-a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{R}^{m,n}$ .

**Esempio 1.5.** Per le matrici  $A$  e  $B$  degli Esempi 1.2 e 1.3, vale che

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -\pi \\ 3/19 & -\sqrt{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2} \quad -B = \begin{pmatrix} -1 & 3/19 & 0 \\ -\pi & -\sqrt{21} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}. \quad \spadesuit$$

**Definizione 1.6 (Uguaglianza tra matrici).** Due matrici

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{R}^{m,n} \quad \text{e} \quad B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathbb{R}^{p,q}$$

si dicono *uguali* se valgono le seguenti proprietà:

- (U1)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso numero di righe e colonne, cioè se  $m = p$  ed  $n = q$ ;
- (U2) le entrate di  $A$  e  $B$  aventi la stessa posizione nelle due matrici coincidono, cioè se  $a_{i,j} = b_{i,j}$  per ogni  $i = 1, \dots, m = p$  e  $j = 1, \dots, n = q$ .

Le due matrici  $A$  e  $B$  dell'Esempio 1.3 sono, perciò, diverse. Ciononostante, sono legate da un'ovvia relazione: l'entrata  $(i, j)$  di  $A$  coincide con l'entrata  $(j, i)$  di  $B$ .

**Definizione 1.7 (Matrice trasposta).** Sia  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ .

La *trasposta* di  $A$  è la matrice di  $\mathbb{R}^{n,m}$ , indicata con  ${}^tA$ , la cui entrata  $(j, i)$  coincide con l'entrata  $(i, j)$  della matrice  $A$  per  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ .

Se  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{R}^{m,n}$  scriveremo in simboli  ${}^tA = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} \in \mathbb{R}^{n,m}$ .

**Esempio 1.8.** Per le matrici  $A$  e  $B$  dell'Esempio 1.3 vale  $B = {}^tA$  e  $A = {}^tB$ .

La trasposta di una matrice riga è una matrice colonna e viceversa:

$$C = (\pi \quad 0 \quad -2 \quad 1/3) \in \mathbb{R}^{1,4} \quad \Rightarrow \quad {}^tC = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ -2 \\ 1/3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,1}.$$

Può accadere che la trasposta di una matrice coincida con la matrice stessa, per esempio

$$D = \begin{pmatrix} 2 & e & -\pi \\ e & 0 & 5 \\ -\pi & 5 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \quad \Rightarrow \quad {}^tD = \begin{pmatrix} 2 & e & -\pi \\ e & 0 & 5 \\ -\pi & 5 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = D.$$

Nel prossimo paragrafo studieremo meglio questo caso. ♠

⚠ Testi diversi utilizzano notazioni diverse per denotare la trasposta. Non solo  ${}^tA$ , ma anche  $A^t$ ,  ${}^\top A$ ,  $A^\top$ ; più raramente si trova anche  $A_{-1}$ .

**Proposizione 1.9 (Proprietà della trasposta).** Valgono le seguenti proprietà:

- (T1) per ogni matrice  $A$ , si ha che  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  se e solo se  ${}^tA \in \mathbb{R}^{n,m}$ ;
- (T2) per ogni  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  si ha che  ${}^t({}^tA) = A$  (la trasposta è un'operazione involutiva);
- (T3) per ogni  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  si ha che  ${}^t(-A) = -({}^tA)$  (la trasposta è compatibile con l'opposto).

*Dimostrazione.* Dimostriamo separatamente le varie proprietà. Per le uguaglianze tra matrici usiamo la Definizione 1.6. Osserviamo innanzitutto che in tutte le uguaglianze da dimostrare le dimensioni delle matrici a destra e a sinistra dell'uguale coincidono, quindi dobbiamo solo controllare che anche le entrate al posto  $(i, j)$  coincidano.

- (T1) È una conseguenza diretta della definizione: il numero di righe di  $A$  è uguale al numero di colonne di  ${}^tA$  e similmente il numero di colonne di  $A$  è uguale al numero di righe di  ${}^tA$ .
- (T2) L'entrata in posizione  $(i, j)$  di  ${}^t({}^tA)$  coincide per definizione con l'entrata in posizione  $(j, i)$  di  ${}^tA$ , che a sua volta coincide con l'entrata in posizione  $(i, j)$  di  $A$ . Le due matrici quindi coincidono.
- (T3) L'entrata in posizione  $(i, j)$  di  ${}^t(-A)$  coincide con l'entrata  $(j, i)$  di  $-A$ , quindi è  $-a_{j,i}$ . D'altra parte l'entrata  $(i, j)$  di  $-({}^tA)$  coincide con l'opposto dell'entrata  $(i, j)$  di  ${}^tA$ , cioè  $-a_{i,j}$ .  $\square$

## 1.2 Matrici quadrate

In questo paragrafo descriveremo alcune classi notevoli di matrici quadrate.

**Definizione 1.10 (Diagonale di una matrice quadrata).** Sia  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n,n}$  una matrice quadrata.

La *diagonale* di  $A$  è l'insieme ordinato delle entrate di posizione  $(i, i)$  di  $A$ .

**Esempio 1.11.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -17 & 4 \\ \pi & 0 & 8 \\ 2 & -3/4 & -e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

La diagonale di  $A$  è la successione ordinata  $(1, 0, -e)$  (e non  $(1, -e)$  o  $(-e, 1, 0)$  o altro).  $\spadesuit$

**Definizione 1.12 (Matrici diagonali).** Sia  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n,n}$  una matrice quadrata.

$A$  si dice *diagonale* se tutte le entrate al di fuori della diagonale sono nulle, cioè se  $a_{i,j} = 0$  per ogni  $i \neq j$ .

**Esempio 1.13.** Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente diagonale e non diagonale.  $\spadesuit$

Osserviamo che una matrice diagonale può essere descritta indicando solo la sua diagonale: per esempio la matrice  $A$  dell'Esempio 1.13 si può indicare come  $A = \text{diag}(1, 0, -e)$ .

Vi sono due casi particolari di matrici diagonali che vale la pena evidenziare:

- La matrice nulla  $0_{n,n}$  è diagonale.
- La matrice diagonale  $n \times n$  avente tutte le entrate diagonali uguali ad 1 è detta *matrice identità di ordine  $n$*  e si indica con  $I_n$ . In simboli, l'entrata in posizione  $(i, j)$  di  $I_n$  coincide con  $\delta_{i,j}$ , il cosiddetto *Delta di Kronecker*, cioè

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Ad esempio, le matrici identità  $I_n$ , con  $n \leq 4$ , sono

$$I_1 = (1), \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### Definizione 1.14 (Matrici triangolari).

- Una matrice quadrata  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n,n}$  si dice *triangolare superiore* se tutte le entrate al di sotto della diagonale sono nulle, cioè se  $a_{i,j} = 0$  quando  $i > j$ .
- Similmente  $A$  si dice *triangolare inferiore* se le sue entrate al di sopra della diagonale si annullano, ovvero se  $a_{i,j} = 0$  quando  $i < j$ .
- $A$  si dice *strettamente triangolare superiore* se è triangolare superiore e inoltre le sue entrate sulla diagonale si annullano, ovvero se  $a_{i,j} = 0$  quando  $i \geq j$ .
- Infine,  $A$  si dice *strettamente triangolare inferiore* se è triangolare inferiore e inoltre le sue entrate sulla diagonale si annullano, ovvero se  $a_{i,j} = 0$  quando  $i \leq j$ .

Osserviamo che ogni matrice strettamente triangolare superiore (inferiore) è anche triangolare superiore (inferiore), ma non vale il viceversa. Si noti anche che la matrice nulla  $0_{n,n}$  è sia (strettamente) triangolare superiore che inferiore.

**Esempio 1.15.** Si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -17 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -e \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 2 & -3/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A$  è triangolare superiore, ma non lo è strettamente, mentre  $B$  è strettamente triangolare inferiore. ♠

**Definizione 1.16 (Matrici simmetriche e antisimmetriche).**

- Una matrice quadrata  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n,n}$  si dice *simmetrica* se coincide con la sua trasposta, cioè se  ${}^tA = A$  e quindi  $a_{i,j} = a_{j,i}$  per ogni  $i, j = 1, \dots, n$ .
- Una matrice quadrata  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n,n}$  si dice *antisimmetrica* se coincide con l'opposto della sua trasposta, cioè se  ${}^tA = -A$  e quindi  $a_{i,j} = -a_{j,i}$  per ogni  $i, j = 1, \dots, n$ .

**Esempio 1.17.** In  $\mathbb{R}^{3,3}$  si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -17 & 4 \\ -17 & 0 & 8 \\ 4 & 8 & -e \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -17 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ -17 & 8 & -e \end{pmatrix}.$$

$A$  è simmetrica, mentre  $B$  non lo è perché  $b_{1,2} = -17 \neq 4 = b_{2,1}$ .

Consideriamo adesso

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -17 & 4 \\ 17 & 0 & 8 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -17 & 4 \\ 17 & 0 & 8 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

$C$  è antisimmetrica, mentre  $D$  non lo è perché  $d_{1,1} = 1 \neq 0$ . ♠

Si noti che in una matrice simmetrica le entrate in posizione simmetrica al di fuori della diagonale sono uguali; in una matrice antisimmetrica invece le entrate al di fuori della diagonale sono opposte e le entrate diagonali sono necessariamente nulle, dal momento che devono soddisfare l'uguaglianza  $a_{i,i} = -a_{i,i}$ .

Ogni matrice diagonale, in particolare la matrice nulla  $0_{n,n}$ , è simmetrica. Invece non possono essere simmetriche le matrici triangolari superiori ed inferiori che non siano diagonali.

L'unica matrice diagonale, o triangolare (superiore ed inferiore), o simmetrica che sia anche antisimmetrica è la matrice nulla  $0_{n,n}$ .

### 1.3 Somma e prodotto per scalare

In questo paragrafo definiremo due importanti operazioni sulle matrici.

**Definizione 1.18 (Somma di matrici).** Siano  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  e  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  due matrici in  $\mathbb{R}^{m,n}$ .

Definiamo *somma di  $A$  e  $B$*  la matrice di  $\mathbb{R}^{m,n}$ , indicata con  $A+B$ , la cui entrata in posizione  $(i, j)$  è  $a_{i,j} + b_{i,j}$ .

⚠ La somma è definita solo per matrici aventi le stesse dimensioni!

**Esempio 1.19.** In  $\mathbb{R}^{3,2}$  si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 3 \\ 5/2 & 2 \end{pmatrix}. \quad \spadesuit$$

La somma di matrici è quindi un'operazione che associa a due matrici delle stesse dimensioni una terza matrice, ancora delle stesse dimensioni. Tale operazione soddisfa una serie di proprietà che ora elencheremo.

**Proposizione 1.20 (Proprietà della somma di matrici).** *Valgono le seguenti proprietà:*

- (S1) per ogni  $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ , si ha  $A + B = B + A$  (proprietà commutativa);
- (S2) per ogni  $A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n}$ , si ha  $A + (B + C) = (A + B) + C$  (proprietà associativa);
- (S3) la matrice nulla è l'unico elemento neutro per la somma, cioè è l'unica matrice tale che  $0_{m,n} + A = A + 0_{m,n} = A$  per ogni  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  (esistenza e unicità dell'elemento neutro);
- (S4) per ogni  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $-A$  è l'unico elemento opposto di  $A$ , cioè è l'unica matrice tale che  $A + (-A) = 0_{m,n}$  (esistenza e unicità dell'opposto).

Inoltre:

- (ST) per ogni  $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ , si ha  ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$  (compatibilità con la trasposta).

*Dimostrazione.* Per dimostrare le uguaglianze tra matrici usiamo la Definizione 1.6; come in precedenza, in tutte le uguaglianze da dimostrare le dimensioni delle matrici a destra e a sinistra dell'uguale coincidono, quindi dobbiamo solo controllare che anche le entrate al posto  $(i, j)$  coincidano.

- (S1) L'elemento in posizione  $(i, j)$  di  $A + B$  è  $a_{i,j} + b_{i,j}$ . La tesi segue dal fatto che l'elemento in posizione  $(i, j)$  di  $B + A$  è  $b_{i,j} + a_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$  (la somma tra numeri è commutativa!).
- (S2) L'elemento in posizione  $(i, j)$  di  $A + (B + C)$  è  $a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j})$  e si ha che  $a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j}) + c_{i,j}$  (la somma tra numeri è associativa!), che è l'elemento in posizione  $(i, j)$  di  $(A + B) + C$ .
- (S3) La verifica che  $0_{m,n} + A = A + 0_{m,n} = A$  è immediata. Supponiamo quindi che esista un secondo elemento neutro, ovvero che esista una matrice  $X \in \mathbb{R}^{m,n}$  tale che  $X + A = A$  per ogni matrice  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ . Questo significa che per ogni entrata  $(i, j)$  vale l'uguaglianza  $x_{i,j} + a_{i,j} = a_{i,j}$  e quindi che  $x_{i,j} = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$  e cioè  $X = 0_{m,n}$ .
- (S4) Di nuovo, la verifica che  $A + (-A) = 0_{m,n}$  è immediata. Supponiamo quindi che esista un secondo elemento opposto, ovvero che esista una matrice  $Y \in \mathbb{R}^{m,n}$  tale che  $A + Y = 0_{m,n}$ . Questo significa che per ogni entrata  $(i, j)$  vale l'uguaglianza  $a_{i,j} + y_{i,j} = 0$  e quindi che  $y_{i,j} = -a_{i,j}$  per ogni  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$  e cioè  $Y = -A$ .
- (ST) Al posto  $(i, j)$  di  ${}^t(A + B)$  troviamo l'elemento in posizione  $(j, i)$  di  $A + B$ , cioè  $a_{j,i} + b_{j,i}$ , che coincide con la somma dell'elemento in posizione  $(i, j)$  di  ${}^tA$  più l'elemento in posizione  $(i, j)$  di  ${}^tB$  e quindi con l'elemento in posizione  $(i, j)$  di  ${}^tA + {}^tB$ .  $\square$

Se  $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ , si scrive  $A - B$  invece di  $A + (-B)$ .

Passiamo ora a definire il prodotto di una matrice per un numero reale.

**Definizione 1.21 (Prodotto per scalare).** Siano  $\alpha \in \mathbb{R}$  un numero (detto anche *scalare*),  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{R}^{m,n}$  una matrice.

Definiamo *prodotto dello scalare*  $\alpha$  per la matrice  $A$  la matrice di  $\mathbb{R}^{m,n}$ , indicata con  $\alpha A$ , la cui entrata in posizione  $(i, j)$  è  $\alpha a_{i,j}$ .

**Esempio 1.22.** Si ha

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 10 \\ 2 & -14 & 0 \end{pmatrix}. \quad \spadesuit$$

Il prodotto per scalare è, quindi, un'operazione che associa ad una coppia formata da uno scalare e una matrice  $m \times n$  un'altra matrice che ha le stesse dimensioni  $m \times n$ . Anche tale operazione soddisfa una serie di proprietà.

**Proposizione 1.23 (Proprietà del prodotto per scalare).** *Valgono le seguenti proprietà:*

- (P1) per ogni  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ , si ha  $1A = A$  (esistenza dell'elemento neutro);
- (P2) per ogni  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  e per ogni  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , si ha  $\alpha_1(\alpha_2 A) = (\alpha_1 \alpha_2)A$  (proprietà associativa);
- (SP1) per ogni  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  e  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , si ha  $(\alpha_1 + \alpha_2)A = \alpha_1 A + \alpha_2 A$  (proprietà distributiva rispetto alla somma di scalari);
- (SP2) per ogni  $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si ha  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$  (proprietà distributiva rispetto alla somma di matrici).

Inoltre:

- (PT) per ogni  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si ha  ${}^t(\alpha A) = \alpha({}^t A)$  (compatibilità con la trasposta);
- (LP) per ogni  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , risulta  $\alpha A = 0_{m,n}$  se e solo se vale  $\alpha = 0$  oppure  $A = 0_{m,n}$  (legge di annullamento del prodotto per scalare).

*Dimostrazione.* Per dimostrare le uguaglianze tra matrici usiamo la Definizione 1.6; come in precedenza, in tutte le uguaglianze da dimostrare le dimensioni delle matrici a destra e a sinistra dell'uguale coincidono, quindi dobbiamo solo controllare che le entrate al posto  $(i, j)$  coincidano. Come nella dimostrazione della Proposizione 1.20, molte proprietà del prodotto per scalare si basano su proprietà simili a quelle della somma e del prodotto tra numeri.

- (P1) L'entrata  $(i, j)$  di  $1A$  è  $1a_{i,j} = a_{i,j}$ .
- (P2) Si ha che  $\alpha_1(\alpha_2 a_{i,j}) = (\alpha_1 \alpha_2) a_{i,j}$ , che è l'elemento in posizione  $(i, j)$  della matrice a destra.
- (SP1) L'entrata  $(i, j)$  di  $(\alpha_1 + \alpha_2)A$  è  $(\alpha_1 + \alpha_2)a_{i,j} = \alpha_1 a_{i,j} + \alpha_2 a_{i,j}$ , che è l'elemento  $(i, j)$  di  $\alpha_1 A + \alpha_2 A$ .
- (SP2) Si ha che  $\alpha(a_{i,j} + b_{i,j}) = \alpha a_{i,j} + \alpha b_{i,j}$ , da cui l'uguaglianza delle matrici.
- (PT) L'elemento in posizione  $(i, j)$  di  ${}^t(\alpha A)$  è  $\alpha a_{j,i}$  e lo stesso vale per  $\alpha({}^t A)$ .
- (LP) Se il prodotto  $\alpha A = 0_{m,n}$  significa che tutte le entrate della matrice  $\alpha A$  sono nulle, cioè che per ogni  $(i, j)$  il prodotto  $\alpha a_{i,j} = 0$ ; per la legge di annullamento del prodotto tra numeri questo implica che o  $\alpha = 0$ , oppure  $a_{i,j} = 0$  per ogni indice  $(i, j)$  e quindi  $A$  è necessariamente la matrice nulla.  $\square$

In generale possiamo dire che le operazioni di somma tra matrici e prodotto per scalare si comportano in modo non troppo diverso dalla somma e dal prodotto tra due numeri cui siamo abituati. Nella prossima lezione descriveremo una terza operazione, detta *prodotto tra matrici*, che invece non avrà tali caratteristiche.