

# Lezione 10

## 10.1 Equazioni cartesiane di piani

Sia  $\alpha \subseteq S_3$  un piano. Nella lezione precedente abbiamo visto che  $\alpha$  può essere individuato da un suo punto qualsiasi  $A$  e da due direzioni ad esso parallele; è però anche possibile individuare lo stesso piano da un suo punto  $A$  e da una retta  $r$  per l'origine ad esso perpendicolare. Supponiamo che la retta  $r$  sia a sua volta individuata da un suo vettore non nullo  $\vec{v}$ ; allora se  $P$  è un qualsiasi punto del piano  $\alpha$ , si ha  $P - A \perp \vec{v}$  e viceversa, come si può vedere qui sotto nella Figura 10.1.

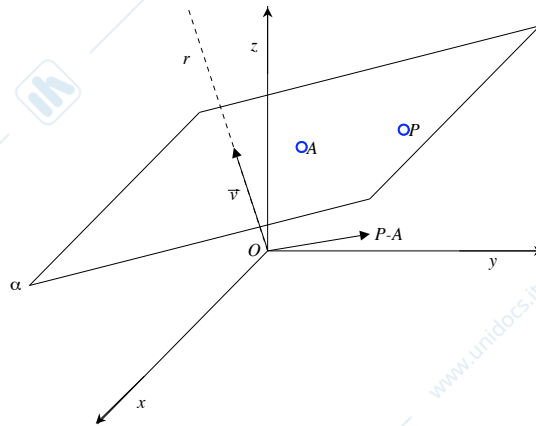


Figura 10.1

Segue allora dalla Proposizione 8.5 e dalla Definizione 8.6 che i punti  $P \in \alpha$  sono tutti e soli i punti dello spazio tali che

$$\langle \vec{v}, P - A \rangle = 0. \quad (10.1.1)$$

Fissiamo adesso un sistema di riferimento ortogonale  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  in  $S_3$ : otteniamo coordinate  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ . Se indichiamo con  $(x, y, z)$  le coordinate del punto generico  $P \in S_3$ , allora vale che

$$P - A = (x - x_A)\vec{i} + (y - y_A)\vec{j} + (z - z_A)\vec{k}$$

e l'equazione (10.1.1) diventa

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Sviluppando i prodotti e ponendo  $d = ax_A + by_A + cz_A$  otteniamo un'equazione della forma

$$ax + by + cz = d. \quad (10.1.2)$$

L'equazione (10.1.2) viene chiamata *equazione cartesiana del piano  $\alpha$  passante per il punto  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e perpendicolare al vettore  $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$* .

Viceversa, supponiamo di avere fissato in  $S_3$  un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ . Fissati numeri reali  $a, b, c, d$ , con  $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \neq \vec{0}$ , si consideri il luogo  $\alpha$  dei punti  $P$  dello spazio le cui coordinate  $(x, y, z)$  soddisfano l'equazione

$$ax + by + cz = d.$$

Sia  ${}^t(x_A \ y_A \ z_A)$  una soluzione di tale equazione e sia  $A = (x_A, y_A, z_A) \in S_3$ . Allora  $d = ax_A + by_A + cz_A$ , sicché l'equazione di cui sopra diviene

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0,$$

ovvero, posto  $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ ,

$$\langle \vec{v}, P - A \rangle = 0.$$

Quindi  $\alpha$  è il piano passante per  $A$  e perpendicolare a  $\vec{v}$ .

Concludiamo che, fissato in  $S_3$  un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ , ogni piano può essere descritto mediante un'equazione della forma (10.1.2) con  $a, b, c$  non simultaneamente nulli e, viceversa, ogni equazione della forma (10.1.2) con  $a, b, c$  non simultaneamente nulli rappresenta un piano.

**Esempio 10.1.** In  $S_3$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ . Siano poi dati  $A = (1, 2, 3) \in S_3$  e  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \in V_3(O)$ . L'equazione cartesiana del piano  $\alpha$  di  $S_3$  perpendicolare al vettore  $\vec{v}$  è data da  $2(x - 1) + 1(y - 2) - 3(z - 3) = 0$ , cioè

$$2x + y - 3z = -5. \quad (10.1.3)$$

Ci chiediamo se qualcuno fra i punti  $B = (1, 1, 1)$  e  $C = (-2, 2, 1)$  di  $S_3$  appartenga al piano  $\alpha$ . Per sincerarcene basta osservare che  ${}^t(1 \ 1 \ 1)$  non è soluzione dell'equazione (10.1.3), quindi  $B \notin \alpha$ , mentre  ${}^t(-2 \ 2 \ 1)$  lo è, quindi  $C \in \alpha$ . ♠

Concludiamo il paragrafo ricordando che è noto dalla geometria euclidea che è possibile descrivere un piano  $\alpha$  dando tre punti non allineati  $A, B, C$  che gli appartengono, come nella Figura 10.2.

Ci possiamo ricondurre al caso precedente osservando che i punti  $A, B, C, P$  sono complanari se e solo se tali sono i vettori  $P - A, B - A, C - A$ . Nel paragrafo

8.3 abbiamo visto che tre vettori sono complanari se e solo se il loro prodotto misto si annulla; la condizione di complanarità si traduce quindi nell'equazione

$$\langle P - A, (B - A) \times (C - A) \rangle = 0.$$

Fissiamo ora un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  in  $S_3$  nel quale i punti  $A, B, C$  abbiano coordinate  $A = (x_A, y_A, z_A)$ ,  $B = (x_B, y_B, z_B)$ ,  $C = (x_C, y_C, z_C)$ , quindi

$$B - A = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}, \quad C - A = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} + (z_C - z_A)\vec{k}.$$

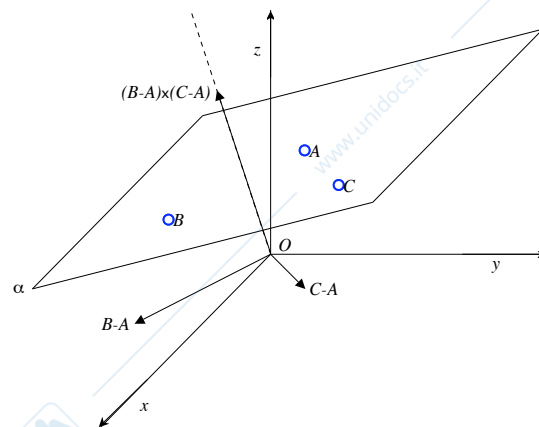


Figura 10.2

Un punto generico  $P$  di coordinate  $(x, y, z)$  giace sul piano  $\alpha$  se e solo se

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0. \quad (10.1.4)$$

**Esempio 10.2.** In  $S_3$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  e si considerino i punti  $A = (1, 1, 0)$ ,  $B = (1, 0, 1)$ ,  $C = (0, 1, 1)$ . Allora  $B - A = -\vec{j} + \vec{k}$ ,  $C - A = -\vec{i} + \vec{k}$ : poiché  $B - A$  e  $C - A$  non sono proporzionali, i tre punti  $A, B, C$  non sono allineati. Per determinare il piano  $\alpha$  individuato da  $A, B, C$  si può applicare la formula (10.1.4). Poiché

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x + 1 - y + 1 - z,$$

l'equazione del piano  $\alpha$  è  $x + y + z = 2$ . ♠

## 10.2 Posizioni relative di piani ed equazioni cartesiane di rette

Dato un piano  $\alpha$  rappresentato tramite un'equazione della forma (10.1.2), è facile determinarne un punto (basta scegliere una soluzione dell'equazione) e un vettore ad esso perpendicolare (basta considerare il vettore  $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ ). Di conseguenza, se di piani ne abbiamo due, è facile stabilire essi sono paralleli o meno.

**Esempio 10.3.** In  $S_3$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  e si considerino il piano  $\alpha$  dell'Esempio 10.1 e il piano  $\beta$  di equazione  $x + y + z = 1$ .

I piani  $\alpha$  e  $\beta$  sono perpendicolari ai vettori  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$  e  $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  rispettivamente: poiché  $\vec{v} \not\parallel \vec{w}$  segue che  $\alpha$  e  $\beta$  non sono paralleli, in particolare si intersecano in una retta.

Sia  $\gamma$  il piano d'equazione  $-2x - y + 3z + 1 = 0$ : un vettore perpendicolare a  $\gamma$  è  $-\vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ , quindi  $\alpha$  e  $\gamma$  sono paralleli. Inoltre il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ -2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

non può avere soluzione, quindi  $\alpha \cap \gamma = \emptyset$ : concludiamo che  $\alpha$  e  $\gamma$  sono paralleli e distinti.

Infine sia  $\delta$  il piano d'equazione  $-2x - y + 3z - 5 = 0$ . Anche  $\alpha$  e  $\delta$  sono paralleli, ma il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ -2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

ha soluzione: concludiamo che  $\alpha = \delta$ . ♠

L'Esempio 10.3 mette in luce un legame fra le posizioni relative di due piani nello spazio e le soluzioni del sistema dato dalle loro equazioni cartesiane: vediamo tale legame in dettaglio.

**Proposizione 10.4 (Posizioni relative di due piani).** In  $S_3$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  e si considerino i piani  $\alpha$  ed  $\alpha'$  rispettivamente di equazioni

$$\alpha : ax + by + cz = d, \quad \alpha' : a'x + b'y + c'z = d'.$$

Siano poi

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}, \quad (A|B) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}.$$

Allora:

- (i)  $\alpha = \alpha'$  se e solo se  $\text{rk}(A) = 1 = \text{rk}(A|B)$ ;
- (ii)  $\alpha$  ed  $\alpha'$  sono paralleli e distinti se e solo se  $\text{rk}(A) = 1, \text{rk}(A|B) = 2$ ;
- (iii)  $\alpha$  ed  $\alpha'$  si intersecano lungo una retta se e solo se  $\text{rk}(A) = 2 = \text{rk}(A|B)$ .

*Dimostrazione.* Come già osservato i punti d'intersezione corrispondono alle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \quad (10.2.1)$$

I piani  $\alpha$  ed  $\alpha'$  sono paralleli e distinti se e solo se  $\alpha \cap \alpha' = \emptyset$ , cioè se e solo se il sistema (10.2.1) non ha soluzioni. Ciò può accadere se e solo se  $\text{rk}(A) = 1$ ,  $\text{rk}(A|B) = 2$ .

I piani  $\alpha$  ed  $\alpha'$  sono coincidenti se e solo se il sistema (10.2.1) è equivalente alla sola equazione  $ax + by + cz = d$ , ovvero se e solo se  $\text{rk}(A) = 1 = \text{rk}(A|B)$ .

Infine i piani  $\alpha$  ed  $\alpha'$  si intersecano lungo una retta se e solo se non sono paralleli coincidenti o distinti, ovvero se e solo se  $\text{rk}(A) = 2 = \text{rk}(A|B)$ .  $\square$

Analoghi risultati si possono dimostrare nel caso di tre o più piani.

Quindi due piani non paralleli in  $S_3$ ,  $\alpha$  ed  $\alpha'$ , si intersecano lungo una retta  $r$ , come nella Figura 10.3; viceversa, **ogni retta  $r$  può essere descritta in questo modo come intersezione di una coppia qualsiasi di piani distinti che la contengono.**

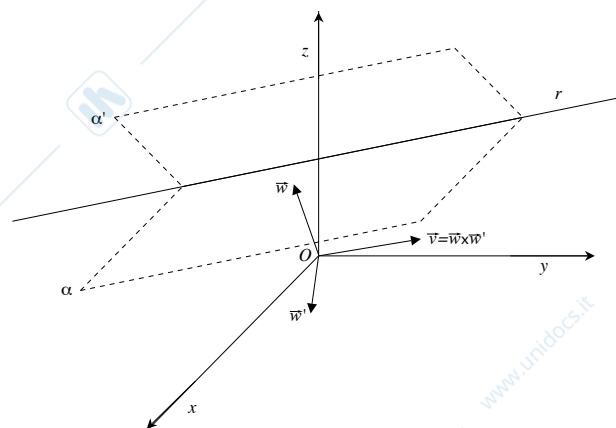


Figura 10.3

Se fissiamo un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  in  $S_3$ , i piani  $\alpha$  ed  $\alpha'$  possono essere descritti mediante due equazioni cartesiane, diciamo

$$ax + by + cz = d, \quad a'x + b'y + c'z = d'$$

rispettivamente, soddisfacenti per la Proposizione 10.4 alla condizione

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$

Se ciò accade le equazioni

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \quad (10.2.2)$$

vengono dette *equazioni cartesiane della retta  $r$  intersezione dei due piani  $\alpha$  ed  $\alpha'$* .

Si noti che, poiché  $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  e  $\vec{w}' = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$  sono rispettivamente perpendicolari a  $\alpha$  e  $\alpha'$ , allora  $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{w}'$  è parallelo a  $r = \alpha \cap \alpha'$ ; in altre parole, **per ottenere il vettore direzione di una retta intersezione di due piani è sufficiente prendere il prodotto vettoriale dei due vettori perpendicolari ai due piani.**

**Esempio 10.5.** Abbiamo visto nell'Esempio 10.3 che il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

definisce una retta  $r$  perché

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Verifichiamo se qualcuno fra i punti  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (-1, 0, 1)$ ,  $C = (1, 0, 0)$ ,  $D = (-2, 2, 1)$  giace sulla retta  $r$ . Per fare ciò basta sostituire le coordinate di tali punti nelle due equazioni del sistema: se entrambe le equazioni sono soddisfatte il punto appartiene alla retta, se almeno una delle due equazioni non è soddisfatta allora il punto non vi appartiene. Con questo in mente è facile verificare che  $A, B, C \notin r$ : invece  $D \in r$ .

Un vettore parallelo a  $r$  è

$$\vec{v} = (2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}.$$

In particolare  $r$  è la retta per  $D = (-2, 2, 1)$  parallela a  $\vec{v} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ , quindi un sistema di equazioni parametriche per  $r$  è

$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 2 - 5t \\ z = 1 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad \spadesuit$$

**⚠** Le equazioni cartesiane di una retta  $r$  non sono univocamente determinate: esse dipendono dalla scelta di una coppia di piani per  $r$ .

Nel paragrafo 9.1 abbiamo mostrato che ogni retta può essere rappresentata mediante le sue equazioni parametriche, dunque viene spontaneo chiedersi quale sia, fissata una retta  $r \subseteq S_3$ , il legame fra questi due metodi di rappresentarla e come si possa passare dall'uno all'altro.

Supponiamo ad esempio che la retta  $r$  sia definita dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

con  $l, m, n$  tutti non nulli. Esplicitando il parametro  $t$  troviamo

$$t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

da cui si ricavano tre equazioni lineari non contenenti il parametro  $t$ :

$$m(x - x_0) = l(y - y_0), \quad n(x - x_0) = l(z - z_0), \quad n(y - y_0) = m(z - z_0),$$

che rappresentano tre piani che chiameremo  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  rispettivamente. Tali piani, per come sono stati ottenuti, contengono la retta  $r$ . Si noti che i vettori

$$\vec{u} = m\vec{i} - l\vec{j}, \quad \vec{v} = n\vec{i} - l\vec{j}, \quad \vec{w} = n\vec{j} - m\vec{k}$$

sono rispettivamente perpendicolari a  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Poiché tali vettori non sono proporzionali a coppie, ciascuna coppia di piani costituisce un insieme di equazioni cartesiane per la retta  $r$ .

Per esercizio, verificare che tale metodo continua a valere anche se qualcuno fra  $l, m, n$  è nullo (al massimo possono esserlo due fra di essi).

**Esempio 10.6.** Riprendiamo la retta  $r$  dell'Esempio 9.1, le cui equazioni parametriche sono date da

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 3 - 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Procedendo come spiegato sopra si ha, formalmente,

$$t = \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{0} = \frac{z - 3}{-3}$$

(dove si è adottata la convenzione standard che se in una frazione il denominatore è zero, anche il numeratore lo è).

Eliminando i denominatori si hanno le tre equazioni

$$y - 2 = 0, \quad -3(x - 1) = 2(z - 3), \quad y - 2 = 0,$$

cioè

$$y - 2 = 0, \quad 3x + 2z = 3, \quad y - 2 = 0.$$

Quindi un sistema di equazioni cartesiane per  $r$  è

$$\begin{cases} y - 2 = 0 \\ 3x + 2z = 3. \end{cases}$$



Viceversa supponiamo di avere un sistema di equazioni cartesiane di una retta  $r$  della forma (10.2.2). Se risolviamo tale sistema, poiché

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2,$$

le sue soluzioni dipendono da un unico parametro  $t \in \mathbb{R}$  e sono quindi della forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + lt \\ y_0 + mt \\ z_0 + nt \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Quindi il generico punto della retta  $r$  è  $(x, y, z) = (x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt)$ , cioè

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

sono equazioni parametriche per la retta  $r$ .

**Esempio 10.7.** Riprendiamo ancora l'Esempio 10.1: sia  $r$  la retta avente equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ x + y + z = 1, \end{cases} \quad (10.2.3)$$

e analizziamo il sistema lineare associato. Si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -5 \\ -1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Quindi il sistema (10.2.3) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} y + 5z = 7 \\ x - 4z = -6, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4z - 6 \\ 7 - 5z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Posto  $t = z$  otteniamo allora delle equazioni parametriche di  $r$

$$\begin{cases} x = 4t - 6 \\ y = 7 - 5t \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Tali equazioni sono diverse da quelle che avevamo trovato nell'Esempio 10.5, pur rappresentando la stessa retta. Per verificarlo si osservi che il seguente sistema ha infinite soluzioni:

$$\begin{cases} -2 + 4t = 4t' - 6 \\ 2 - 5t = 7 - 5t' \\ 1 + t = t'. \end{cases}$$

Può essere utile capire come variano le equazioni cartesiane di una retta quando cambiamo la coppia di piani che la rappresenta.

A tale scopo consideriamo una retta  $r$  le cui equazioni cartesiane sono della forma (10.2.2). Sia poi  $\alpha$  il piano di equazione cartesiana  $a''x + b''y + c''z = d''$ . Affinché  $r \subseteq \alpha$  occorre e basta che ogni punto di  $r$  appartenga ad  $\alpha$ , ovvero che ogni soluzione del sistema (10.2.2) sia anche soluzione dell'equazione  $a''x + b''y + c''z = d''$ . Questa condizione equivale a chiedere che il sistema (10.2.2) sia equivalente a

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d''. \end{cases} \quad (10.2.4)$$

Si può dimostrare facilmente, facendo operazioni elementari sulle matrici del sistema (10.2.2) e sul sistema (10.2.4), che tale condizione è soddisfatta se e solo se l'equazione di  $\alpha$  è della forma

$$\lambda(ax + by + cz - d) + \mu(a'x + b'y + c'z - d') = 0 \quad (10.2.5)$$

per qualche coppia  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Questo risultato viene spesso chiamato *metodo del fascio (di piani)*.

**Esempio 10.8.** Si consideri la retta  $r$  dell'Esempio 10.5; essendo parallela al vettore  $\vec{v} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ , essa è anche parallela alla retta  $s$  di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = -5t \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Inoltre il punto  $(0, 0, 0) \notin r$ , quindi  $r \neq s$ ; pertanto  $r$  ed  $s$  sono contenute in un unico piano  $\alpha$  di cui vogliamo determinare un'equazione cartesiana.

Osserviamo che tale piano deve contenere  $r$ : il metodo del fascio ci permette allora di dedurre che l'equazione di  $\alpha$  deve essere della forma dell'equazione (10.2.5), cioè

$$\lambda(2x + y - 3z + 5) + \mu(x + y + z - 1) = 0. \quad (10.2.6)$$

Dobbiamo determinare  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  in maniera tale che il piano avente equazione 10.2.6 contenga la retta  $s$ : a tale scopo, essendo  $r \parallel s$ , è sufficiente scegliere  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  in modo tale che il piano avente equazione 10.2.6 contenga almeno un punto di  $s \setminus r$ , per esempio  $(0, 0, 0)$ . Concludiamo che  $5\lambda = \mu$  ovvero le equazioni cercate sono  $\lambda(7x + 6y + 2z) = 0$ . Si noti che tutte queste equazioni sono proporzionali, quindi definiscono lo stesso piano; dunque possiamo fissare  $\lambda$ , per esempio  $\lambda = 1$ . ♠

**Osservazione 10.9 (Equazioni cartesiane di rette nel piano).** Come già notato nell'Osservazione 9.7, una retta  $r \subseteq S_2$  nel piano può essere vista come una retta in  $S_3$  che giace sul piano di equazione  $z = 0$ , cioè una retta avente equazioni cartesiane

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ z = 0, \end{cases}$$

che possono chiaramente essere riassunte in un'unica equazione della forma

$$ax + by = c. \quad (10.2.7)$$

Alternativamente, ricordiamo che nella lezione precedente abbiamo osservato che una retta è completamente individuata dalla sua direzione  $\vec{v} \neq \vec{0}$  e da un suo punto qualsiasi  $R \in r$ . Sia ora fissato sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O\vec{i}\vec{j}$  in  $S_2$  nel quale  $R = (x_0, y_0)$  e  $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j}$ . Se indichiamo con  $(x, y)$  le coordinate del punto generico  $P$  del piano, allora  $P - R = (x - x_0, y - y_0)$  e dalla condizione di parallelismo della Proposizione 7.14 segue che un punto  $P \in S_2$  giace sulla retta  $r$  se e solo se

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{pmatrix} \leq 1,$$

quindi se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{pmatrix} = m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0. \quad (10.2.8)$$

Sviluppando l'equazione (10.2.8) e ponendo  $a = m$ ,  $b = -l$ ,  $c = mx_0 - ly_0$ , otteniamo un'equazione della forma

$$ax + by = c, \quad (10.2.7)$$

esattamente come sopra. L'equazione (10.2.7) viene chiamata *equazione cartesiana della retta  $r$  passante per il punto  $R = (x_0, y_0)$  e parallela al vettore  $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j}$* .

Un discorso analogo vale per l'equazione della retta passante per i due punti  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ . In questo caso un vettore parallelo alla retta è  $B - A = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$ , quindi possiamo la formula (10.2.8) con  $R = A$ ,  $l = x_B - x_A$  e  $m = y_B - y_A$ , ottenendo la ben nota formula

$$(y_B - y_A)(x - x_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0, \quad (10.2.9)$$

che talvolta troviamo scritta

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

Osserviamo che, fissato in  $S_2$  un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}$ , non solo ogni retta può essere descritta mediante un'equazione della forma (10.2.7) con  $a, b$  non simultaneamente nulli ma, viceversa, è anche possibile dimostrare (e la dimostrazione è lasciata al lettore) che ogni equazione della forma (10.2.7) con  $a, b$  non simultaneamente nulli rappresenta una retta.

**Esempio 10.10.** In  $S_2$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}$  e si consideri la retta  $r$  passante per i punti  $A = (1, 3)$  e  $B = (-1, -1)$ . Per trovare l'equazione cartesiana di  $r$  applichiamo la formula (10.2.9) ottenendo

$$-2x + y = 1.$$

Si noti che la direzione della retta  $r$  è data semplicemente dalla differenza  $A - B = (2, 4)$ : quindi  $r$  è la stessa retta che abbiamo già studiato nell'Esempio 9.1! Un altro modo di trovare l'equazione cartesiana di  $r$  poteva allora essere di partire da quella parametrica

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + 4t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

esplicitando il parametro  $t$  in funzione di  $x$  e  $y$  e quindi imponendo che:

$$t = \frac{1}{2}(x + 1) = \frac{1}{4}(y + 1),$$

da cui ricaviamo proprio  $-2x + y = 1$ . ♠

**Osservazione 10.11.** Spesso alle scuole superiori si impara che l'equazione di una retta nel piano ha la forma

$$y = mx + q. \quad (10.2.10)$$

Viene naturale chiedersi se tale equazione corrisponda o meno alla nostra equazione  $ax + by = c$ , e in caso positivo quali siano i vantaggi di usare l'una rispetto all'altra. Supponiamo che  $b \neq 0$ : allora possiamo dividere entrambi i membri di (10.2.7) per  $b$ , ottenendo

$$\frac{a}{b}x + y = \frac{c}{b},$$

che, ponendo  $m = -a/b$  e  $q = c/b$ , è esattamente della forma (10.2.10). Quindi le due equazioni coincidono se  $b \neq 0$ , ovvero se la retta non è della forma  $x = k$ , una retta parallela all'asse delle ordinate. È chiaro quindi che conviene usare la formula (10.2.7), che ci permette di descrivere **tutte** le rette del piano, senza nessuna esclusione.

In  $S_2$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}$  e supponiamo di avere due rette  $r : ax + by = c$  ed  $r' : a'x + b'y = c'$ . Viene naturale domandarci se si intersecano o meno, o se sono parallele. Rispondere a questa domanda equivale a risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Applicando il Teorema di Rouché–Capelli (Proposizione 5.2) possiamo dimostrare il seguente risultato.

**Proposizione 10.12 (Posizioni relative di due rette nel piano).** In  $S_2$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}$  e si considerino le rette  $r$  ed  $r'$  rispettivamente di equazioni

$$r : ax + by = c, \quad r' : a'x + b'y = c'.$$

Siano poi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, \quad (A|B) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}.$$

Allora:

- (i)  $r = r'$  se e solo se  $\text{rk}(A) = 1 = \text{rk}(A|B)$ ;
- (ii)  $r$  ed  $r'$  sono parallele e distinte se e solo se  $\text{rk}(A) = 1$ ,  $\text{rk}(A|B) = 2$ ;
- (iii)  $r$  ed  $r'$  si intersecano in un punto se e solo se  $\text{rk}(A) = 2 = \text{rk}(A|B)$ .

**Esempio 10.13.** In  $S_2$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}$  e si consideri la retta  $s$  di equazione  $x - 2y = 3$ . Per studiare la posizione di  $s$  rispetto alla retta  $r$  dell'Esempio 10.10, di equazione  $-2x + y = 1$ , applichiamo la Proposizione 10.12. Si ha che

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

quindi il suo rango è 2: concludiamo che le rette sono incidenti.

Invece le rette  $r$  ed  $u : 4x - 2y = 5$  sono parallele e distinte: infatti si ha che

$$\text{rk} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1 \neq 2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

## 10.3 Posizioni relative di rette e piani

Vogliamo ora studiare come distinguere le posizioni relative che possono assumere un piano  $\alpha$  e una retta  $r$  nello spazio  $S_3$ .

Ricordiamo che un piano  $\alpha$  e una retta  $r$  in  $S_3$

- possono essere *incidenti in un unico punto*,
- $r$  può essere contenuta in  $\alpha$ ,
- oppure  $r$  può non avere punti in comune con  $\alpha$ :

(in questi due ultimi casi si dice che  $r$  e  $\alpha$  sono *paralleli*).

Lo studio della posizione relativa di un piano di cui è nota l'equazione cartesiana e di una retta di cui è noto un sistema di equazioni parametriche è immediato, come si può vedere dall'esempio seguente.

**Esempio 10.14.** In  $S_3$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  e si consideri ancora una volta il piano  $\alpha$  dell'Esempio 10.1, di equazione  $2x + y - 3z = -5$ ; un vettore perpendicolare ad  $\alpha$  è  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ . Siano  $r'$ ,  $r''$ ,  $r'''$  le rette di equazioni parametriche

$$r' : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - t, \end{cases} \quad r'' : \begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \\ z = 1 + t, \end{cases} \quad r''' : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t - 3 \\ z = t, \end{cases}$$

al variare di  $t \in \mathbb{R}$ , rispettivamente.

Iniziamo a determinare l'intersezione  $\alpha \cap r'$ . Osserviamo che se  $P \in r'$  le sue coordinate sono della forma  $(t-1, t, 1-t)$  per un qualche  $t \in \mathbb{R}$ : affinché  $P \in \alpha$  allora  $t(t-1, t, 1-t)$  deve essere soluzione dell'equazione di  $\alpha$ , cioè si deve avere

$$2(t-1) + t - 3(1-t) = -5,$$

da cui si deduce  $6t = 0$ , ovvero  $t = 0$ , che corrisponde al punto di coordinate  $(-1, 0, 1)$ .

Si noti che verificare che  $\alpha$  e  $r'$  non sono paralleli senza determinarne il punto di intersezione è immediato: un vettore parallelo a  $r'$  è  $\vec{v}' = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  ed è facile convincersi che  $\alpha \parallel r'$  se e solo se  $\vec{v} \perp \vec{v}'$ : poiché  $\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle = 6$  segue che  $\vec{v} \not\perp \vec{v}'$ , dunque  $\alpha \not\parallel r'$ .

Passiamo a determinare  $\alpha \cap r''$ . Procediamo come sopra sostituendo le equazioni parametriche di  $r''$  nell'equazione di  $\alpha$ : si ottiene

$$2t + (t+2) - 3(1+t) = -5,$$

da cui si deduce  $-1 = -5$ , che non ha soluzioni, perciò  $\alpha \cap r'' = \emptyset$ .

Concludiamo esaminando l'intersezione  $\alpha \cap r'''$ . Procedendo come sopra si ottiene

$$2(-1+t) + (t-3) - 3t = -5,$$

da cui si deduce  $0 = 0$ . Ogni  $t \in \mathbb{R}$  è soluzione di tale equazione, quindi ogni punto di  $r'''$  è in  $\alpha$ , perciò la retta  $r'''$  giace sul piano  $\alpha$ ,  $r''' \subset \alpha$ .

Nei secondi due casi risulta che il piano e la retta sono paralleli, cosa che si poteva dedurre direttamente. Infatti un vettore parallelo ad  $r''$  e  $r'''$  è  $\vec{v}'' = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Poiché  $\langle \vec{v}, \vec{v}'' \rangle = 0$  segue che  $\vec{v} \perp \vec{v}''$ , dunque  $\alpha \parallel r'', r'''$ . ♠

Anche lo studio della posizione relativa di una retta di cui sono note le equazioni cartesiane e di una retta di cui è noto un sistema di equazioni parametriche è immediato, ed è illustrato nell'esempio seguente. Ricordiamo che avevamo analizzato i vari casi di rette coincidenti, incidenti, parallele distinte, sghembe, nella lezione precedente.

**Esempio 10.15.** In  $S_3$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  e si consideri la retta  $r$  dell'Esempio 10.3 di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Sia poi  $s$  la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = -3 + t \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le rette  $r$  ed  $s$  sono parallele ai vettori  $\vec{v} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$  e  $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  rispettivamente, quindi  $r \parallel s$ . Ci domandiamo se siano incidenti: a tale scopo si può procedere come nell'Esempio 10.14, sostituendo le equazioni di  $s$  dentro le equazioni dei due piani che definiscono  $r$ . Si ottiene in tal modo il sistema

$$\begin{cases} 2(t-1) + (-3+t) - 3t = -5 \\ (t-1) + (-3+t) + t = 1 \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 3t = 5. \end{cases}$$

L'unica soluzione di tale sistema è  $t = 5/3$ ; il punto corrispondente sulla retta  $s$  è  $(2/3, -4/3, 5/3)$  che, per costruzione, appartiene anche a  $r$ . ♠

Per concludere il paragrafo (e la lezione), affrontiamo il caso delle posizioni reciproche di una retta e un piano e di due rette di cui siano note le equazioni cartesiane. Il seguente risultato è un'applicazione immediata del Teorema di Rouché–Capelli (Proposizione 5.2).

**Proposizione 10.16 (Posizioni relative di un piano e una retta).** *In  $S_3$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  e si considerino la retta  $r$  e il piano  $\alpha$  di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d', \end{cases} \quad \alpha : a''x + b''y + c''z = d''.$$

Siano poi

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}, \quad (A|B) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}.$$

Allora:

- (i)  $r \subseteq \alpha$  se e solo se  $\text{rk}(A) = 2 = \text{rk}(A|B)$ ;
- (ii)  $r \cap \alpha = \emptyset$  se e solo se  $\text{rk}(A) = 2, \text{rk}(A|B) = 3$ ;
- (iii)  $r$  ed  $\alpha$  si intersecano in un punto se e solo se  $\text{rk}(A) = 3 = \text{rk}(A|B)$ .

**Esempio 10.17.** In  $S_3$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  e si considerino la retta  $r$  e il piano  $\alpha$  rispettivamente di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ x + y + z = 1, \end{cases} \quad \alpha : 3z - 2x - y + 1 = 0.$$

Facendo operazioni elementari sulla matrice completa  $(A|B)$  del sistema

$$\begin{cases} 3z - 2x - y + 1 = 0 \\ 2x + y - 3z = -5 \\ x + y + z = 1, \end{cases}$$

otteniamo

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \leftrightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftrightarrow R_3 + R_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right),$$

da cui deduciamo che  $r \cap \alpha = \emptyset$ . ♠

Più interessante è il caso di due rette descritte tramite le loro equazioni cartesiane.

**Proposizione 10.18 (Posizioni relative di due rette nello spazio).** In  $S_3$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  e si considerino le rette  $r$  e  $r'$  di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''' \end{cases}.$$

Siano poi

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix}, \quad (A|B) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}.$$

Allora:

- (i)  $r = r'$  se e solo se  $\text{rk}(A) = 2 = \text{rk}(A|B)$ ;
- (ii)  $r$  e  $r'$  sono parallele e distinte se e solo se  $\text{rk}(A) = 2$ ,  $\text{rk}(A|B) = 3$ ;
- (iii)  $r$  ed  $r'$  si intersecano in un punto se e solo se  $\text{rk}(A) = 3 = \text{rk}(A|B)$ ;
- (iv)  $r$  ed  $r'$  sono sghembe se e solo se  $\text{rk}(A) = 3$ ,  $\text{rk}(A|B) = 4$ .

*Dimostrazione.* Si considerino le due rette  $r_O$  e  $r'_O$  rispettivamente di equazioni

$$r_O : \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}, \quad r'_O : \begin{cases} a''x + b''y + c''z = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z = 0 \end{cases}.$$

Tali rette passano per l'origine  $O$ . Inoltre  $r_O$  è parallela al vettore  $(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \times (a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k})$ , dunque  $r \parallel r_O$ : similmente  $r' \parallel r'_O$ .

Poiché  $A \in \mathbb{R}^{4,3}$  segue che  $2 \leq \text{rk}(A) \leq 3$ . Chiaramente la condizione  $r \parallel r'$  equivale a  $r_O = r'_O$ . Ciò equivale a dire che ogni piano contenente  $r'_O$  contiene anche  $r_O$ . Tenendo conto di come si possono scrivere le equazioni dei piani contenenti una retta data (cioè del metodo del fascio), tale condizione equivale a  $\text{rk}(A) = 2$ . Di conseguenza deduciamo anche che  $r \not\parallel r'$  se e solo se  $\text{rk}(A) = 3$ .

Tenendo conto che  $\text{rk}(A|B) \leq \text{rk}(A) + 1$  (perché aggiungiamo una sola colonna), segue la classificazione data nell'enunciato. □

**Esempio 10.19.** In  $S_3$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  e si considerino le rette  $r$  e  $r'$  rispettivamente di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ x + y + z = 1, \end{cases} \quad r' : \begin{cases} 3x - y + 3z = 2 \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

110

Facendo operazioni elementari sulla matrice completa

$$(A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

del sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ x + y + z = 1 \\ 3x - y + 3z = 2 \\ x - y + z = 1, \end{cases}$$

otteniamo

$$(A|B) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -5 \\ -1 & 0 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_2/2} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -5 \\ -1 & 0 & 4 & 6 \\ -5 & 0 & 0 & -3 \\ 5/2 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_3/2} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -5 \\ -1 & 0 & 4 & 6 \\ -5 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5/2 \end{array} \right),$$

da cui deduciamo che  $r$  e  $r'$  sono sghembe. ♠