

Lezione 3

3.1 Sistemi di equazioni lineari

Definizione 3.1 (Sistemi di equazioni lineari e loro soluzioni).

- Un'equazione lineare nelle n incognite x_1, x_2, \dots, x_n a coefficienti in $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ è un'equazione della forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \quad (3.1.1)$$

dove $a_j, b \in K$ sono numeri fissati, e $j = 1, \dots, n$.

- Un sistema di m equazioni lineari nelle n incognite x_1, x_2, \dots, x_n a coefficienti in $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ è un insieme di m equazioni lineari della forma

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

dove $a_{i,j}, b_i \in K$ sono numeri fissati, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

- Una soluzione dell'equazione (3.1.1) è una successione ordinata $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ di elementi di K per cui vale l'identità numerica $a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \dots + a_n\bar{x}_n = b$.
- Similmente, una soluzione del sistema (3.1.2) è una soluzione che soddisfa ciascuna equazione del sistema.

Esempio 3.2. L'equazione

$$2x_1 - x_2 = 2$$

è lineare in 2 incognite: le coppie ordinate $(1, 0)$, $(0, -2)$, $(-1, -4)$ sono sue soluzioni. Invece le coppie ordinate $(0, 1)$, $(-2, 0)$, $(-4, -1)$ non sono soluzioni.

Il sistema

$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 0 \\ x + y - 3z &= -5 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

è lineare di 3 equazioni in 3 incognite. Una sua soluzione è la successione ordinata $(1/2, 1/2, 2)$. ♠

Convenzionalmente, ad un sistema della forma (3.1.2), viene aggiunta una parentesi graffa che indica quali equazioni devono essere considerate: perciò un sistema di m equazioni lineari nelle n incognite x_1, x_2, \dots, x_n a coefficienti reali viene spesso denotato con

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases}$$

⚠ Le due scritture qui sotto hanno dunque significati diversi:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = -2, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

Quando il numero di incognite è basso spesso per indicare le incognite si usano le lettere distinte $x, y, z, t \dots$ o anche $a, b, c \dots$ invece di x_i .

Definizione 3.3 (Matrici associate ad un sistema lineare). Dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite del tipo (3.1.2) ad esso sono naturalmente associate le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Le matrici A e B vengono dette rispettivamente *matrice dei coefficienti* del sistema (o anche *matrice incompleta* del sistema) e *matrice dei termini noti* del sistema. La matrice

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

è detta *matrice completa* del sistema. La linea verticale serve a ricordare che ciò che si trova alla sua sinistra è la matrice incompleta del sistema e ciò che si trova alla sua destra è la colonna dei termini noti; la sua utilità (o necessità) sarà chiara più avanti.

La notazione matriciale è molto vantaggiosa e si può usare per descrivere in forma compatta il sistema (3.1.2); possiamo infatti porre

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

e questo ci permette di scrivere il sistema (3.1.2) in forma matriciale come

$$AX = B. \quad (3.1.3)$$

In particolare, con tale formalismo, le soluzioni del sistema (3.1.2) sono esattamente le matrici numeriche

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

tali che valga l'identità matriciale $A\bar{X} = B$.

Esempio 3.4. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = -2. \end{cases}$$

La matrice completa del sistema è

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{array} \right).$$

Il sistema può essere scritto in forma matriciale $AX = B$ come

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Si noti che ${}^t(1 \ -1)$ è soluzione del sistema poiché

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Invece ${}^t(-1 \ 1)$ non è soluzione del sistema: infatti

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



Introduciamo adesso un po' di terminologia.

Definizione 3.5 (Sistemi omogenei e sistemi compatibili). Un sistema di m equazioni in n incognite del tipo (3.1.2) si dice

- *omogeneo* se $B = 0_{m,1}$, *non omogeneo* se $B \neq 0_{m,1}$;
- *compatibile* se ha soluzioni, *non compatibile* o *incompatibile* se non ha soluzioni.

Inoltre ogni sistema lineare di m equazioni in n incognite $AX = B$ ha un suo *sistema omogeneo associato* della forma $AX = 0_{m,1}$.

Esempio 3.6. Il sistema dell'Esempio 3.4 è, ovviamente, non omogeneo; inoltre è compatibile poiché ammette ${}^t(1 \ -1)$ come soluzione.

Se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ allora ogni sistema omogeneo $AX = 0_{m,1}$ è compatibile, in quanto $0_{n,1}$ è sempre una sua soluzione.

Invece il sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

è non omogeneo e non può essere compatibile: infatti se (\bar{x}_1, \bar{x}_2) fosse una sua soluzione si dovrebbe avere contemporaneamente $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 0$ e $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = -2$, cosa che, ovviamente, è impossibile. ♠

3.2 Matrici (fortemente) ridotte per righe

Avendo introdotto le nozioni di sistema di equazioni lineari e relativa soluzione, ci poniamo il problema di descrivere un metodo efficiente per determinare la totalità delle soluzioni di un dato sistema.

A tale scopo iniziamo considerando un semplice esempio.

Esempio 3.7. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 1 \\ -x_2 + x_4 + x_7 = 0 \\ 3x_2 + x_6 + 3x_7 = -2, \end{cases}$$

che possiamo scrivere in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che questo sistema ha una proprietà “notevole”: in ogni sua equazione c’è almeno un’incognita (quale?) con coefficiente 1 che non figura in nessuna delle altre equazioni.

Questo ci permette di risolvere il sistema in maniera veloce; in ogni equazione si sceglie un’incognita che non figura nelle rimanenti equazioni del sistema, e la si esplicita in funzione delle altre incognite dell’equazione stessa.

Per esempio nella prima equazione esplicitiamo l’incognita $x_1 = 1 - x_2 - 2x_3 - x_5$, nella seconda l’incognita $x_4 = x_2 - x_7$, e infine nella terza l’incognita $x_6 = -2 - 3x_2 - 3x_7$.

Le soluzioni del sistema sono quindi necessariamente tutte e sole le matrici colonna in $\mathbb{R}^{7,1}$ della forma

$$X = \begin{pmatrix} 1 - x_2 - 2x_3 - x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_2 - x_7 \\ x_5 \\ -2 - 3x_2 - 3x_7 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

al variare di x_2, x_3, x_5, x_7 in \mathbb{R} .

Per esempio, se scegliamo i valori $x_2 = x_3 = x_5 = x_7 = 0$, si ottiene la soluzione ${}^t(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2 \ 0)$. Invece, scelti $x_2 = 1, x_3 = 0, x_5 = -2, x_7 = 1$, si ottiene la soluzione ${}^t(2 \ 1 \ 0 \ 0 \ -2 \ -8 \ 1)$, e così via (le soluzioni sono quindi infinite!). ♠

La proprietà descritta nell’Esempio 3.7, cioè il fatto che in ogni equazione del sistema c’è un’incognita che non figura in nessuna delle altre equazioni, può essere tradotta in linguaggio matriciale osservando che in ogni riga della matrice incompleta c’è almeno un’entrata uguale a 1 che è l’unica entrata non nulla nella sua colonna.

A tutti i sistemi la cui matrice incompleta ha questa proprietà si può applicare il metodo descritto nell’Esempio 3.7 ottenendo facilmente la soluzione generale.

Per questo motivo è utile dare un nome a tale tipo di matrici.

Definizione 3.8 (Matrici fortemente ridotte per righe). Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

La matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{m,n}$ si dice *fortemente ridotta per righe* se vale la seguente proprietà: se la riga di indice i_0 contiene entrate non nulle, allora esiste una sua entrata a_{i_0, j_0} , detta *pivot* (della riga di indice i_0), che vale 1 e tale che $a_{i, j_0} = 0$ per ogni $i \neq i_0$.

Esempio 3.9. La matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -1 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 4 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è fortemente ridotta per righe, e ne abbiamo indicato i pivot, mentre non lo è la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spesso è utile lavorare con matrici aventi delle proprietà simili a quelle descritte sopra, ma un po' più deboli.

Definizione 3.10 (Matrici ridotte per righe). Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

La matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{m,n}$ si dice *ridotta per righe* se vale la seguente proprietà: se la riga di indice $i_0 < m$ contiene entrate non nulle, allora esiste una sua entrata $a_{i_0, j_0} \neq 0$, detta *pivot* (della riga di indice i_0), tale che $a_{i, j_0} = 0$ per ogni $i > i_0$.

Chiaramente ogni matrice fortemente ridotta per righe è anche ridotta per righe, ma non vale il viceversa, come mostra il seguente esempio.

Esempio 3.11. Consideriamo le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \boxed{5} & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_1 è ridotta per righe, ma non fortemente ridotta per righe. Invece la matrice A_2 non è ridotta per righe, dunque non lo è neanche fortemente. ♠

Per concludere questa lezione, osserviamo che esistono delle analoghe nozioni di *matrici (fortemente) ridotte per colonne*, ma per non complicarci troppo la vita noi ci limiteremo, per il momento, a considerare solo le riduzioni per righe.