Schema sulle matrici con esempi

Matematica

3 pag.

RIGA E COLONNA?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$ RIGA, COLONNA → 4_{32}

MATRICE COEFFICIENTI (A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

MATRICE INCOGNITE (X)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

MATRICE DEI TERMINI NOTI (B)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

termini noti

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 5x+2y+z=5 \\ 6x+3y+2z=3 \end{cases}$$

coefficienti

MATRICE TRASPOSTA A^T

$$A \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{diventa}} A^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

MOLTIPLICAZIONI TRA MATRICI *

moltiplico, sommo

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

esempio $0 \cdot 1 = 0$
$2 \cdot 0 = 0 \longrightarrow 0+0+(-2) = -2$
$-1 \cdot 2 = -2$

DETERMINANTE DI UNA MATRICE

2·2 $A \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \det. A = (A_{11} \cdot A_{22}) - (A_{12} \cdot A_{21})$

se ho una matrice 3·3: sommo/sottraggo le matrici tra loro fino ad ottenere due Ø vicini così ottengo una matrice 2·2

MINORE COMPLEMENTARE M_{ij} (riga, colonna)

$$A \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2$ → è il risultato che ottengo calcolando il determinante

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$

COMPLEMENTO ALGEBRICO

$$\begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix}$$

risultati dei minori complementari

* la moltiplicazione tra una matrice riga e una colonna da come risultato un solo numero

es: $[2 \ -1 \ 3] \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 + (-1)(-3) + 3 \cdot 2 = 10 + 3 + 6 = 19$

SOMME / SOTTRAZIONI TRA MATRICI

$A \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ $B \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ $C \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 7 \end{vmatrix}$

$2B - 5A - C$

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & 10 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & 5 & -15 \\ -20 & 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & -7 \end{vmatrix}$$

$2 - 10 + 0 = -8$

$$= \begin{vmatrix} -8 & 8 & -9 \\ -18 & 14 & -4 \end{vmatrix}$$

es: trova il determinante

$|A|$ = determinante di A

$\det(A) =$

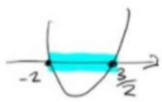
$2x(x-2) + x \leq -6x + 2(x+3)$

$2x^2 \underbrace{-4x + x}_{-3x} \leq \underbrace{-6x + 2x}_{-4x} + 6$

$2x^2 + x - 6 \leq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 48 = 49$

$x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 \pm 7}{4} \begin{cases} -2 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$



$S: -2 \leq x \leq \frac{3}{2}$

Esempio es con la regola di SARRUS
↳ calcolo del DETERMINANTE

106 $\begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 6 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ [−16]

$$\begin{matrix} + & + & + & - & - & - \\ 2 & -5 & -1 & 2 & -5 \\ 6 & 1 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 4 & -3 \end{matrix}$$

$$= 2\cdot 1\cdot 1 + (-5)(5)4 + (-1)(6)(-3) - (-1)(1)(4) - 2\cdot 5(-3) - (-5)(6)1 =$$

$$= 2 - 100 + 18 + 4 + 30 + 30 = -16$$

MATRICE INVERSA A^{-1} → o invertibile

1- calcolo il determinante A che deve essere $\neq 0$ (sennò è impossibile)
2- trovo la matrice dei complementi algebrici
3- calcolo la matrice $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(\begin{matrix}\text{matrice complementi} \\ \text{algebrici}\end{matrix}\right)^T$ → matrice trasposta

si moltiplica per ogni elemento e dà come risultato una matrice

es: determina k in modo che la matrice sia invertibile: perché possa esserlo $\det A \neq 0$
quindi → calcolando il determinante mi trovo da cosa deve essere diverso k

SISTEMI LINEARI

dal sistema che otteniamo dal problema mi ricavo A, B e X
Ci sono 2 metodi per risolverlo:

① METODO DELLA MATRICE INVERSA
1- mi ricavo la matrice A^{-1}
2- moltiplico la matrice ottenuta per B → $X = A^{-1} \cdot B$
↳ ottengo una matrice colonna tipo $\begin{matrix} x= \\ y= \\ z= \end{matrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

② METODO DI CRAMER ESTESO (con questo metodo ottengo x, y, z con calcoli separati, così se richiesto nel problema ne trovo solo uno)

- mi calcolo il determinante di A
- sostituisco la colonna 1, 2... con B
- risolvo il determinante con la colonna sostituita
- faccio $\frac{D_B}{\det A}$ → risultato ottenuto prima

ESEMPI SISTEMI LINEARI

451 Paolo, Anna e Marco sono tre fratelli. La somma delle età dei tre fratelli è di 13 anni. L'età di Anna è il doppio di quella di Paolo e fra tre anni l'età di Marco sarà il doppio di quella che avrà Paolo. Quali sono le età dei tre fratelli?

x = età Paolo
y = età Anna
z = età Marco

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ y = 2x \\ z + 3 = 2(x+3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 13 \\ -2x + y = 0 \\ -2x + z = 3 \end{cases}$$

Può essere richiesto di risolvere una equazione/disequazione:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

↳ mi calcolo i vari determinanti così da ottenere una equazione/disequazione normale che so risolvere

In un gruppo turistico sono presenti in totale 85 persone tra italiani, francesi ed inglesi. Il numero di italiani supera di 10 quello degli inglesi ed è il doppio della differenza tra francesi e inglesi. Trova il numero degli italiani

x = n° italiani
y = n° francesi
z = n° inglesi

$$\begin{cases} x + y + z = 85 \\ x = z + 10 \\ x = 2(y - z) \end{cases} \xrightarrow{\text{FORMA NORMALE}} \begin{cases} x + y + z = 85 \\ x - z = 10 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Marco ha nel portafoglio €120 in banconote da €5, €10 ed €20.
Il n° di banconote da €10 è uguale alla somma delle altre banconote.
Se spende €40 in banconote da €10 il numero di banconote da €10 è uguale a quello delle banconote da €20.
Quante banconote da €5 ha Marco in portafoglio?

esempio

x = n° banconote da €5
y = n° banconote da €10 → 5
z = n° banconote da €20 → 1

$$\begin{cases} 5x + 10y + 20z = 120 \\ \underbrace{y - 4}_{\text{n° banconote da €10 che ho nel portafoglio se pago €40 in banconote da €10}} = \underbrace{z}_{\text{n° banconote da €20}} \\ y = x + z \end{cases}$$

es: Determina i valori ⓐ e ⓑ affinché l'uguaglianza sia vera

$$\begin{vmatrix} a+b & 1 \\ -1 & b-1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a+2 & 1 \\ b-2 & b-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

si moltiplica

vanno fatte le uguaglianze tra i colori tipo
$a+2=2$
$\left.\begin{matrix} b-2=0 \\ b-1=1 \end{matrix}\right\}$ ne basta solo uno

$$\boxed{\begin{matrix} a=0 \\ b=2 \end{matrix}}$$

MATRICI UGUALI
devono essere uguali

MATRICE NULLA
la matrice deve avere solo 0

MATRICE QUADRATA
la matrice deve avere il n° delle righe uguali a quelle delle colonne

MATRICE RIGA
deve essere formata solo da una riga (. . .)

MATRICE COLONNA
deve essere formata solo da una colonna (⋮)

MATRICE TRIANGOLARE

* **SUPERIORE**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

* **INFERIORE**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

DIAGONALE SECONDARIA

viene chiamata DIAGONALE PRINCIPALE

MATRICE DIAGONALE

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

MATRICE SIMMETRICA

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

MATRICE TRASPOSTA
guarda la prima pagina