

Lezione 6

6.1 Determinanti

In questa lezione affronteremo da un punto di vista prettamente operativo la nozione di determinante, descrivendone le proprietà ed i metodi di calcolo, senza entrare nei dettagli e omettendo quasi tutte le dimostrazioni.

Definizione 6.1 (Sottomatrici). Siano $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{m,n}$ una matrice e $p, q \in \mathbb{Z}$ due interi positivi tali che $1 \leq p \leq m$ e $1 \leq q \leq n$.

Una *sottomatrice* $p \times q$ di A è una matrice in $K^{p,q}$ ottenuta da A considerando solo le entrate che si trovano all'intersezione di p righe e q colonne. In alternativa una sottomatrice $p \times q$ può essere pensata come ottenuta da A cancellando $m - p$ righe e $n - q$ colonne fissate.

Esempio 6.2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -i & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,3}.$$

Le sottomatrici 2×2 di A sono

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -i & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Invece la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -i & -3 \end{pmatrix}$$

non è sottomatrice di A .

Si consideri poi la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\pi & 0 & -2/5 \\ \pi & 5 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Le sottomatrici 2×3 di B sono

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\pi & 0 & -2/5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \pi & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\pi & 0 & -2/5 \\ \pi & 5 & 5 \end{pmatrix}. \quad \spadesuit$$

Daremo adesso una definizione induttiva del determinante.

Definizione 6.3 (Determinante). Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n,n}$ una matrice quadrata.

Il *determinante* di A è il numero di K , indicato con $\det(A)$ o $|A|$, definito come segue.

- Se $n = 1$, $\det(a_{1,1}) = a_{1,1}$.
- Se $n \geq 2$,

$$\det(A) = a_{1,1}A_{1,1} + a_{1,2}A_{1,2} + \cdots + a_{1,n}A_{1,n} = \sum_{j=1}^n a_{1,j}A_{1,j}, \quad (6.1.1)$$

ove $A_{i,j}$ indica il prodotto di $(-1)^{i+j}$ per il determinante della sottomatrice ottenuta da A cancellando la riga di indice i e la colonna di indice j .

La formula (6.1.1) viene detta *sviluppo di Laplace secondo la prima riga*, mentre il numero $A_{i,j}$ viene detto *complemento algebrico* o *cofattore* dell'entrata $a_{i,j}$.

Osserviamo che il costo computazionale del calcolo di un determinante diviene sempre più oneroso man mano l'ordine della matrice quadrata cresce: infatti per calcolare il determinante di una matrice $A \in K^{n,n}$ bisogna calcolare n determinanti di matrici d'ordine $n-1$, e per ciascuno di essi $n-1$ determinanti di matrici quadrate d'ordine $n-2$, e così via. In totale quindi per calcolare il determinante di una matrice $A \in K^{n,n}$ è necessario moltiplicare

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$

determinanti di matrici quadrate d'ordine 1 (cioè entrate di A) e sommarli dopo averli moltiplicati per un'opportuna potenza di -1 .

Diamo alcuni esempi di determinanti di matrici quadrate di dimensione piccola.

Esempio 6.4. Si consideri una matrice quadrata generale di dimensione 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Calcolando i cofattori risulta

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1} \det(a_{2,2}) = a_{2,2} \quad \text{e} \quad A_{1,2} = (-1)^{1+2} \det(a_{2,1}) = -a_{2,1},$$

quindi concludiamo che

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}A_{1,1} + a_{1,2}A_{1,2} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

Per esempio, calcoliamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -i & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-i) = 0 + 2i = 2i,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 1 - 8 = -7,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 2 \cdot (-2) = -4 + 4 = 0.$$

Si consideri adesso una matrice quadrata generale di dimensione 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Calcolando i cofattori risulta

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2},$$

$$A_{1,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} = -a_{2,1}a_{3,3} + a_{2,3}a_{3,1},$$

$$A_{1,3} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} = a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}.$$

Concludiamo che

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}A_{1,1} + a_{1,2}A_{1,2} + a_{1,3}A_{1,3} \\ &= a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) + a_{1,2}(-a_{2,1}a_{3,3} + a_{2,3}a_{3,1}) + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}), \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ &\quad - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}. \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

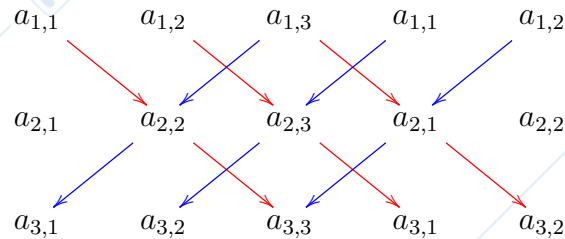
Per esempio, consideriamo la matrice A dell'Esempio 5.11. Si ha

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 1 + 0 - 3 + 2 - 0 - 2 = -2. \end{aligned}$$


La formula (6.1.2) viene spesso chiamata *regola di Sarrus* ed esiste un metodo per ricordarsela, che consiste nel ricopiare le prime due colonne della matrice sulla destra in questo modo:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{matrix}$$

quindi calcolare il determinante come la differenza tra la somma dei prodotti dei termini collegati dalle frecce rosse che partono dall'alto a sinistra dirette verso il basso a destra, meno la somma dei prodotti dei termini collegati dalle frecce blu che partono dall'alto a destra dirette verso il basso a sinistra:



Il lettore verifichi che in questo modo si riottiene la formula (6.1.2).

 **Attenzione!** La regola di Sarrus vale solo per matrici quadrate di ordine 3. Se ad esempio volessimo ripetere il procedimento per matrici 4×4 , otterremmo una somma algebrica di otto prodotti. Avevamo però già osservato che per calcolare il determinante di una matrice di ordine n è necessario sommare $n!$ prodotti, e ovviamente $4! = 24$ è ben più grande di 8.

Un altro aiuto mnemonico riguarda il segno per cui bisogna moltiplicare il determinante della sottomatrice cofattore (i, j) nel calcolo di $A_{i,j}$: alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \dots \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

si può associare la “matrice di segni”

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

così per determinare il segno $(-1)^{i+j}$ è sufficiente guardare la corrispondente entrata di posizione (i, j) della matrice dei segni.

Osservazione 6.5. In base alla definizione, se $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n,n}$ è triangolare inferiore, il calcolo del suo determinante si riduce al prodotto delle entrate sulla

diagonale. Infatti

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ = a_{1,1} a_{2,2} \begin{vmatrix} a_{3,3} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \dots = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} \dots a_{n,n}.$$

Per esempio

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \sqrt{327} & -5 & 0 \\ 117 & \pi & 1/15 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) \cdot 1/15 = -1.$$

Ciò vale anche per le matrici diagonali, e in particolare $\det(I_n) = 1$.

6.2 Proprietà del determinante

Per semplificare il calcolo del determinante è utile un metodo che si basa sul buon comportamento dei determinanti rispetto alle operazioni elementari di riga e che descriveremo in questo paragrafo.

Proposizione 6.6. *Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Se $A \in K^{n,n}$, valgono le seguenti proprietà:*

- (DR1) *se A' è ottenuta da A sommando ad una riga un multiplo di un'altra, si ha che $\det(A') = \det(A)$;*
- (DR2) *se A' è ottenuta da A moltiplicando una riga per una costante $\alpha \in K$, si ha che $\det(A') = \alpha \det(A)$;*
- (DR3) *se A' è ottenuta da A scambiando due righe diverse, si ha che $\det(A') = -\det(A)$.*

Osserviamo che la proprietà (DR3) ci permette di sviluppare il determinante della matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n,n}$ secondo una riga qualsiasi. Si può perciò parlare dello *sviluppo di Laplace secondo la riga di indice i* dato dalla formula:

$$\det(A) = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \dots + a_{i,n}A_{i,n} = \sum_{j=1}^n a_{i,j}A_{i,j}.$$

Esempio 6.7. Quanto visto nell'Osservazione 6.5 può essere esteso anche a matrici triangolari superiori, è sufficiente sviluppare il determinante secondo l'ultima riga, invece che secondo la prima.

Per esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Continuando con le proprietà notevoli dei determinanti si ha la seguente proposizione.

Proposizione 6.8. *Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Se $A \in K^{n,n}$, allora $\det({}^tA) = \det(A)$.*

Poiché ogni operazione elementare di riga su tA equivale ad un'analoga operazione elementare di colonna su A , dalle Proposizioni 6.6 e 6.8 segue subito il seguente risultato.

Proposizione 6.9. *Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Se $A \in K^{n,n}$, valgono le seguenti proprietà:*

- (DC1) *se A' è ottenuta da A sommando ad una colonna un multiplo di un'altra, si ha che $\det(A') = \det(A)$;*
- (DC2) *se A' è ottenuta da A moltiplicando una colonna per una costante $\alpha \in K$, si ha che $\det(A') = \alpha \det(A)$;*
- (DC3) *se A' è ottenuta da A scambiando due colonne diverse, si ha che $\det(A') = -\det(A)$.*

Osserviamo che i risultati delle proposizioni precedenti implicano in particolare che è possibile sviluppare il determinante di $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n,n}$, secondo una colonna qualsiasi. Quindi si può parlare di *sviluppo di Laplace secondo la colonna di indice j* dato dalla formula:

$$\det(A) = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,j}A_{i,j}.$$

L'idea generale per calcolare il determinante di una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è la seguente. Prima si trasforma con operazioni elementari di tipo (E1) A in A' , matrice ridotta per righe. Poi si trasforma con scambi di colonna A' in A'' , matrice triangolare superiore; se si devono operare h di tali scambi si ha $\det(A) = \det(A') = (-1)^h \det(A'')$, in forza delle Proposizioni 6.6 e 6.9.

Si noti che, per la generica matrice $A \in K^{n,n}$, tale metodo permette di ridurre il numero di operazioni da $n \cdot n!$ a circa $2n^3/3$.

Illustriamo questa tecnica con un esempio.

Esempio 6.10. Si consideri la matrice quadrata di dimensione 3 dell'Esempio 6.4. Possiamo ripetere il calcolo del determinante osservando che

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_1} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{array} \right| \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \right| \\ & \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} - \left| \begin{array}{ccc} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \right| \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} (-1)^2 \left| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right| \\ & = (-1)^2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 = -2. \end{aligned}$$

Osserviamo che anche la proprietà (DR1) ha un'importante conseguenza: consideriamo $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n,n}$, ed indichiamo con R_i la sua riga di indice i , cioè la matrice

$$R_i = (a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad \dots \quad a_{i,n}).$$

Supponiamo, per semplicità, che esistano $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in K$ tali che l'ultima riga si scrive come

$$R_n = \alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_{n-1} R_{n-1}.$$

Allora con operazioni elementari di riga (E1) della forma

$$A \xrightarrow{R_n \rightarrow R_n - \alpha_1 R_1 - \dots - \alpha_{n-1} R_{n-1}} A'$$

si ottiene una nuova matrice A' avente la riga di indice n nulla. Sviluppando il determinante secondo l'ultima riga si ottiene allora $\det(A) = \det(A') = 0$.

Un discorso analogo vale sostituendo nel ragionamento sopra la parola riga con la parola colonna ed utilizzando la proprietà (DC1).

Un caso ancor più particolare è quello in cui la matrice di cui dobbiamo calcolare il determinante ha due righe o due colonne uguali; allora le Proposizioni 6.6 e 6.9 ci dicono subito che tale determinante è necessariamente nullo.

Esempio 6.11. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -17 & 2 \\ -1 & 17 & 171/35 \\ 2 & -34 & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}.$$

Poiché le colonne C_j di A sono legate dalla relazione $C_2 = -17C_1 + 0C_3$ segue da quanto visto sopra che $\det(A) = 0$.

Per esercizio si verifichi la nullità di $\det(A)$ calcolandolo con uno qualsiasi dei metodi sopra descritti. ♠

Esempio 6.12 (Determinante di Vandermonde). Un'altra applicazione interessante della Proposizione 6.6 è il calcolo dei cosiddetti determinanti di matrici di Vandermonde o, più semplicemente, determinanti di Vandermonde, che si utilizzano nel contesto dell'interpolazione polinomiale.

Dati $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, la *matrice di Vandermonde relativa a* x_1, x_2, \dots, x_n è

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice di Vandermonde è detto *determinante di Vandermonde relativo a* x_1, x_2, \dots, x_n e si denota con $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$; per calcolarlo in funzione dei numeri x_1, x_2, \dots, x_n si può procedere con operazioni elementari. Per esempio se $n = 4$, allora

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, x_3, x_4) &\stackrel{C_4 \rightarrow C_4 - x_1 C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 - x_1 x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 - x_1 x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & (x_2 - x_1)x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & (x_3 - x_1)x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & (x_4 - x_1)x_4^2 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_3 \rightarrow C_3 - x_1 C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & (x_2 - x_1)x_2 & (x_2 - x_1)x_2^2 \\ 1 & x_3 & (x_3 - x_1)x_2 & (x_3 - x_1)x_3^2 \\ 1 & x_4 & (x_4 - x_1)x_2 & (x_4 - x_1)x_4^2 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_2 \rightarrow C_2 - x_1 C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2 & (x_2 - x_1)x_2^2 \\ 1 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)x_2 & (x_3 - x_1)x_3^2 \\ 1 & x_4 - x_1 & (x_4 - x_1)x_2 & (x_4 - x_1)x_4^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2 & (x_2 - x_1)x_2^2 \\ x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)x_3 & (x_3 - x_1)x_3^2 \\ x_4 - x_1 & (x_4 - x_1)x_4 & (x_4 - x_1)x_4^2 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

L'ultimo determinante è ancora di Vandermonde, precisamente è $V(x_2, x_3, x_4)$ ma di dimensione più piccola, cioè $n = 3$. Ripetendo il ragionamento otteniamo alla fine che

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3).$$

In generale lo stesso procedimento induttivo permette di dimostrare la formula

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i>j}} (x_i - x_j). \quad (6.2.1)$$

Per esempio abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = V(1, 2, -2, -1, 0),$$

quindi

$$\begin{aligned} & V(1, 2, -2, -1, 0) \\ &= (2-1)(-2-1)(-1-1)(-1)(-2-2)(-1-2)(-2)(-1+2)(2)(1) = 288. \end{aligned}$$

Si noti che la formula (6.2.1) permette di affermare che $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ se e solo se gli x_1, x_2, \dots, x_n non sono tutti distinti. ♠

Concludiamo il paragrafo con altro importante risultato: il Teorema di Binet, di cui omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 6.13 (Teorema di Binet). Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Se $A, B \in K^{n,n}$ sono matrici quadrate, allora

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

⚠ Attenzione: $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Esempio 6.14. Si considerino le matrici

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente $\det(E_{1,1}) = \det(E_{2,2}) = 0$ e $\det(E_{1,1} + E_{2,2}) = \det(I_2) = 1$; in particolare $\det(E_{1,1}) + \det(E_{2,2}) \neq \det(E_{1,1} + E_{2,2})$. ♠

6.3 Ancora sull'inversa di matrici

In questo paragrafo illustreremo il legame fra la nozione di determinante, di invertibilità e di inversa di una matrice quadrata $A \in K^{n,n}$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definizione 6.15 (Matrice aggiunta). Siano $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n,n}$ una matrice quadrata.

Definiamo *aggiunta di A* la matrice $\text{adj}(A)$ la cui entrata di posizione (i, j) è il complemento algebrico $A_{j,i}$ dell'entrata $a_{j,i}$.

Data una matrice $A \in K^{n,n}$, consideriamo il prodotto di A per la sua aggiunta: $B = A \text{adj}(A)$. Per definizione, la sua entrata $b_{i,j}$ di indice (i, j) è il prodotto della riga di indice i di A per la colonna di indice j di $\text{adj}(A)$, cioè

$$b_{i,j} = (a_{i,1} \ a_{i,2} \ \dots \ a_{i,n}) \begin{pmatrix} A_{j,1} \\ A_{j,2} \\ \vdots \\ A_{j,n} \end{pmatrix} = a_{i,1}A_{j,1} + a_{i,2}A_{j,2} + \dots + a_{i,n}A_{j,n}. \quad (6.3.1)$$

Se $i = j$ la formula (5.2.2) implica che $b_{i,i} = \det(A)$.

Consideriamo ora l'entrata $b_{i,j}$ con $i \neq j$: per fissare le idee scegliamo $i = 2$ e $j = 1$ (gli altri casi sono analoghi). Si ha

$$\begin{aligned} b_{2,1} &= a_{2,1}A_{1,1} + a_{2,2}A_{1,2} + \dots \\ &= a_{2,1}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} + a_{2,2}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} + \dots \\ &= \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Concludiamo che

$$b_{i,j} = \begin{cases} \det(A) & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

In maniera simile, utilizzando la formula (6.3.1), otteniamo anche che $\text{adj}(A)A = \det(A)I_n$. Abbiamo quindi dimostrato la seguente proposizione.

Proposizione 6.16. *Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Se $A \in K^{n,n}$ è una matrice quadrata, allora*

$$A \text{adj}(A) = \text{adj}(A)A = \det(A)I_n.$$

Esempio 6.17. Consideriamo ancora la matrice dell'Esempio 6.4 (e dell'Esempio 6.10)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo calcolare

$$\begin{array}{lll} A_{1,1} = 1, & A_{1,2} = -1, & A_{1,3} = 1, \\ A_{2,1} = -5, & A_{2,2} = 3, & A_{2,3} = 1 \\ A_{3,1} = 1, & A_{3,2} = -1, & A_{3,3} = -1, \end{array}$$

quindi

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si può verificare direttamente che $A \text{adj}(A) = \text{adj}(A)A = -2I_3$. ♠

Dalla Proposizione 6.16 otteniamo il seguente importante corollario.

Corollario 6.18. *Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Se $A \in K^{n,n}$ è una matrice quadrata, allora A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$. In tal caso si ha $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$ e inoltre*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A). \quad (6.3.2)$$

Dimostrazione. Supponiamo che A sia invertibile; cioè che esista la matrice inversa A^{-1} che, come sappiamo, soddisfa la relazione $AA^{-1} = I_n$. Calcolando il determinante di ambo i membri di tale relazione, dal Teorema di Binet segue che

$$1 = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}),$$

dunque $\det(A^{-1}) \neq 0$ e si ha $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

Viceversa sia $\det(A) \neq 0$. Allora

$$A \left(\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \right) = \frac{1}{\det(A)} A \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} (\det(A) I_n) = I_n,$$

cioè A è invertibile e vale la formula (6.3.2). \square

Esempio 6.19. Sia ancora una volta A la matrice degli Esempi 5.11, 6.4, 6.10; nell'Esempio 6.17 abbiamo calcolato la sua aggiunta

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

che coincide con quanto avevamo calcolato nell'Esempio 5.11 risolvendo l'equazione matriciale $AX = I_3$. \spadesuit

6.4 Il metodo di Cramer

Consideriamo un sistema di Cramer, ovvero un'equazione matriciale $AX = B$ con $A \in K^{n,n}$ matrice invertibile; sappiamo che tale equazione ha come unica soluzione la matrice $\bar{X} = A^{-1}B$. Supponiamo ora che $B \in K^{n,1}$, ovvero che l'equazione $AX = B$ sia, di fatto, un sistema di equazioni lineari.

Il fatto che la matrice $\bar{X} = {}^t(\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \dots \ \bar{x}_n)$ sia soluzione significa che vale l'identità di matrici numeriche

$$\bar{x}_1 C_1 + \bar{x}_2 C_2 + \dots + \bar{x}_n C_n = B$$

dove, come già fatto in precedenza, indichiamo con C_j la j -esima colonna di A , cioè $C_j = {}^t(a_{1,j} \ a_{2,j} \ \dots \ a_{n,j})$.

Sia A_j la matrice ottenuta da A sostituendo a C_j la matrice B . Si noti che sottraendo alla j -esima colonna di A_j le matrici $\bar{x}_j C_h$ per $h = 1, \dots, n$ ed $h \neq j$, otteniamo una matrice \widehat{A}_j che ha tutte le colonne uguali a quelle di A tranne la j -esima che coincide con $\bar{x}_j C_j$.

Tenendo conto della Proposizione 6.9 (precisamente di (DC1) e (DC2)) segue l'uguaglianza $\det(A_j) = \bar{x}_j \det(A)$.

Proposizione 6.20 (Metodo di Cramer). *Siano $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $A \in K^{n,n}$ una matrice invertibile e $B \in K^{n,1}$. Sia poi $\Delta = \det(A)$ e $\Delta_j = \det(A_j)$ il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna B alla j -esima colonna. Allora il sistema $AX = B$ ha come unica soluzione la matrice*

$$\frac{1}{\Delta} {}^t(\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_n).$$

Esempio 6.21. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

avente come matrice incompleta la matrice A dell'Esempio 5.11. Nell'Esempio 6.4 abbiamo calcolato $\delta = \det(A) = -2$. Inoltre

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Quindi l'unica soluzione di tale sistema è

$$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \spadesuit$$