[VERIFICA DELLE IPOTESI]

	innocente	colpevole
	ok	err (2° tipo)
	err (1° tipo)	ok

→ ipotesi che si dà x scontata

H_0 = ipotesi nulla → innocente (fino a prova contraria)

ipotesi strana che voglio dimostrare, se la scelgo ne ho la dimo

H_1 = ipotesi alternativa → colpevole

→ noi ci occuperemo di tenere bassa la probabilità di commettere errori del secondo tipo.

→ se abbasso la probabilità di 1° tipo → alzo la prob del 2° tipo

1) U statistica test

2) $C \subset \mathbb{R}$ (sottoinsieme) C regione critica

- $U \in C \Rightarrow$ rifiuto H_0
- $U \notin C \Rightarrow$ Non rifiuto H_0

α livello (di significatività) = massima probabilità che mi concedo di commettere un errore di primo tipo

max $\bar{\bar{P}}$ (errore I tipo)

p-value → valore di soglia che intercorre tra rifiutare o meno H_0

↳ - + piccolo valore di α con cui RIFIUTIAMO H_0

- + grande valore di α con cui non rifiutiamo H_0

Test su μ di $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ [σ^2 nota, z-test]

media

esempio macchina che riempie barattoli manomessa

$X \sim N(\mu, \sigma^2 = 1)$

$n = 8$ barattoli $\bar{X}$ dopo ogni prova il peso medio

1° caso $\begin{cases} H_0 & \mu = \mu_0 \\ H_1 & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

2° caso $\begin{cases} H_0 & \mu = \mu_0 \\ H_1 & \mu > \mu_0 \end{cases}$

3° caso $\begin{cases} H_0 & \mu \geq \mu_0 \\ H_1 & \mu < \mu_0 \end{cases}$ → sbagliare

STANDARDIZZO se H_0 vera

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \overset{H_0 \text{ vera}}{\sim} N(0,1)$$

Rif H_0 se
- 1° caso $|u| > z_{\frac{\alpha}{2}}$
- 2° caso $u > z_\alpha$
- 3° caso $u < -z_\alpha$

p-value
- 1° $2 \cdot (1 - \phi(|u|))$
- 2° $1 - \phi(u)$
- 3° $1 - \phi(-u)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2 = 1)$ $n = 8$ barattoli

$\mu_0 = 200$ g

H_0 = funziona

H_1 = rotta

errore 2° tipo → interrompere produzione anche se funziona

→ a seconda della riparazione scelgo α
- processo veloce α = basso
- processo difficile α alto molto si cura

$\alpha = 10\%$

→ TEST 1° TIPO (MACCHINA STARATA - la media deve essere bilanciata in entrambi estremi)

$$\begin{cases} H_0 & \mu = 200 \\ H_1 & \mu \neq 200 \end{cases}$$

$$U = \frac{\bar{X} - 200}{\sqrt{\frac{1}{8}}}$$

rifiuto H_0 se $|U| > Z_{0.05} = \underline{1.645}$

$$u = \frac{199.1 - 200}{\sqrt{1/8}} = \underline{-2.54}$$

↑ FERMO LA PRODUZIONE

→ RIFIUTO H_0 ⇒ la probabilità di errore 1° tipo sotto 10%

$$p\text{-value} = 2 \cdot (1 - \phi(2.54)) \simeq 0.02$$

: PROBABILITÀ DI SBAGLIARE RIFIUTANDO H_0 circa 2%

È PIÙ SPECIFICO

ALTRO CASO

- la VARIANZA non è NOTA ⇒ P-TEST (non più z-test)

[σ^2 incognita - t-test]

$$u = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$$

Rifiuto H_0 se
1° $|u| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$
2° $u > t_{\alpha, n-1}$
3° $u < -t_{\alpha, n-1}$

ALTRO CASO $X \sim Bern(p)$ Test (asintotico) su p

n osservazioni deve essere elevato

$$\bar{X} = \frac{n° \text{ successi}}{n° \text{ prove}}$$

$$\begin{cases} H_0 & p = p_0 \\ H_1 & p \neq p_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 & p \overset{\leq}{=} p_0 \\ H_1 & p > p_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 & p \overset{\geq}{=} p_0 \\ H_1 & p < p_0 \end{cases}$$

$$u = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

↓
Z-TEST
STESSE REGOLE

- esempio → DETERMINARE SE MONETA È FALSA

n° prove = 200

H_0 non truccata, H_1 truccata

scelta α → in base alle circostanze. → $\alpha = 5\%$

ERRORE 1: dirai che ti sei fatto fregare (truccata) quando era solo sfortuna

$$\begin{cases} H_0 & p = 0.5 \\ H_1 & p \neq 0.5 \end{cases}$$

Testa 118 volte

$$u = \frac{\frac{118}{200} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{200}}} = 2.5$$

→ rifiuto H_0 se $|u| > Z_{0.025} = 1.96$

5% probabilità che ci sbagliamo

2.5 non è così diverso. → la moneta è truccata

→ se $\alpha = 1\%$ → H_0 devo accettarlo invece

118 teste su 200 lanci è lontano da quello che ci aspettiamo (100 volte testa) → quindi devo fare delle verifiche

ALTRO ESEMPIO

X distribuzione qualsiasi $E(X) = m$ Test (asintotico) su m

esempio
X è durata lampadina
m è la durata media
↳ distribuzione qualsiasi

$U = \frac{\bar{X} - m_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$ $\begin{cases} H_0 & m = m_0 \\ H_1 & m \neq m_0 \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 & m = m_0 \\ H_1 & m > m_0 \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 & m = m_0 \\ H_1 & m < m_0 \end{cases}$

↓ Z-TEST

esempio

X durata (ore) lampadine "durata media almeno 1000 ore" GARANTITA DALLA DITTA

$n = 100$ lampadine

$\bar{X} = 936$ ore

m durata media

H_0 = non sono male prodotte, è sfortuna $\Rightarrow \begin{cases} H_0 & m = 1000 \\ H_1 & m < 1000 \end{cases}$

H_1 = c'è del dolo $\Rightarrow$

$\alpha = 1\%$ molto sicuri ↳ esempio fare causa

$s^2 = 16\,230$

↳ Rif H_0 se $u < \underbrace{-z_{0.01}}_{-2.32}$

$u = \frac{936 - 1000}{\sqrt{\frac{16\,230}{100}}} \simeq -5$

— SIAMO STATI TRUFFATI

$X \sim N(\mu_x, \sigma^2_x)$

$Y \sim N(\mu_y, \sigma^2_y)$

TEST CONFRONTO TRA μ_x e μ_y

4 casi
- VARIANZE NOTE
- VARIANZE IGNOTE, MA UGUALI
- VAR IGNOTE / CAMPIONI NUMEROSI
- CAMPIONI ACCOPPIATI ↳ MOLTO DIVERSO

LE OSSERVAZIONI SONO (X_i, Y_i) (X_n, Y_n)

$\begin{cases} H_0 & \mu_x = \mu_y \\ H_1 & \mu_x \neq \mu_y \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 & \mu_x = \mu_y \\ H_1 & \mu_y > \mu_y \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 & \mu_x = \mu_y \\ H_1 & \mu_x < \mu_y \end{cases}$

- VARIANZA NOTA

$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma^2_x}{n_x} + \frac{\sigma^2_y}{n_y}}}$ = Z-TEST

- VARIANZA IGNOTA ma uguali (viane)

$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S^2_p \left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}}$

S^2_p = VARIANZA POOLED

$S^2_p = \frac{(n_x - 1) S^2_x + (n_y - 1) S^2_y}{n_x + n_y - 2}$

t-test, $t\,(n_x + n_y - 2)$ g di l

13/01

$X \sim N(\mu_x, \sigma^2_x)$

$X \sim N(\mu_y, \sigma^2_y)$

$\begin{cases} H_0 \ \mu_x = \mu_y & (\mu_x - \mu_y = 0) \\ H_1 \ \mu_x \neq \mu_y & (\mu_x - \mu_y \neq 0) \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 \ \mu_x \leq \mu_y & (\mu_x - \mu_y = 0) \\ H_1 \ \mu_y > \mu_y & (\mu_x - \mu_y > 0) \end{cases}$

σ^2_x, σ^2_y incognita, campioni numerosi

$$U = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n_x} + \frac{S_y^2}{n_y}}} \simeq Z \quad \text{z-test}$$

σ^2_x, σ^2_y campioni accoppiati (X_1, Y_1) (X_2, Y_2) (X_3, Y_3) (X_n, Y_n)

$W = X - Y$ $W \sim N(\mu_n, \sigma^2 n) \rightarrow$ incognita $w_1, w_2, w_n \xrightarrow{\text{ricavo}} \bar{W}$, S^2_n

$\mu_n = \mu_x - \mu_y$

$\begin{cases} H_0 \ \mu_x = \mu_y & (\mu_x - \mu_y = 0) \\ H_1 \ \mu_x \neq \mu_y & (\mu_x - \mu_y \neq 0) \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 \ \mu_x = \mu_y & (\mu_x - \mu_y = 0) \\ H_1 \ \mu_y > \mu_y & (\mu_x - \mu_y > 0) \end{cases}$

$\begin{cases} H_0 \ \mu_n = 0 \\ H_1 \ \mu_n \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 \ \mu_n = 0 \\ H_1 \ \mu_n > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 \ \mu_n = 0 \\ H_1 \ \mu_n < 0 \end{cases}$

$$U = \frac{\bar{W} - 0}{\sqrt{\frac{S_W^2}{n}}} \sim T\text{-}t_{n-1}$$

T-test

confronto

se rifiuto H_0, sono evidentemente diverse. se non rifiuto H_0, possono essere diverse ma non ne ho la prova

$X \sim N(\mu_x, \sigma^2_x)$

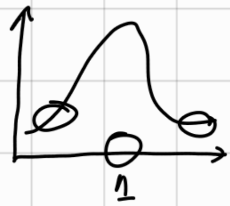
$Y \sim N(\mu_y, \sigma^2_y)$

X_1 ___ X_n

Y_1 ___ Y_n

$\begin{cases} H_0 \ \sigma^2_x = \sigma^2_y \\ H_1 \ \sigma^2_x \neq \sigma^2_y \end{cases}$ $U = \frac{S^2_x}{S^2_y}$

F di Fisher



esempio elezioni / elette in 2 collegi
% elettroni in x = % in y = ?

$X \sim$ Bernoulliana (P_x)

$Y \sim$ Bern (P_y)

campioni numerosi

n_x osservazioni di X, K_x succ

n_y ...... di Y, K_y succ

$\begin{cases} H_0 \ P_x = P_y \\ H_1 \ P_x \neq P_y \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 \ P_x = P_y \\ H_1 \ P_x > P_y \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 \ P_x = P_y \\ H_1 \ P_x < P_y \end{cases}$

$$\bar{X} = \frac{K_x}{n_x} \simeq N\left(P_x, \frac{P_x(1-P_x)}{n_x}\right)$$

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{P_0 - (1 - P_p) \cdot \left[\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right]}}$$

$n_x = 90$ fem — 36 fumatori

$n_y = 100$ masch — 52 fumatori

$\begin{cases} H_0 & p_x = p_y \\ H_1 & p_x \neq p_y \end{cases}$ = evidenza che le probabilità siano diverse

$\begin{cases} H_0 & p_x = p_y \\ H_1 & p_x < p_y \end{cases}$ vedere se probabilità fumo maschi più alto

$\alpha = 5\%$

$\bar{p}_X = \frac{36}{90} = 0.4$ $\bar{y} = \frac{52}{110} \simeq 0.47$

$p_p = \frac{88}{200} = 0.44$ pooled (metà tra $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la media pesata si basa su valori simili)

($2°$ caso) Z-test

Rifiuto H_0 se $u < -z_{0.05}$ 1.645

$-0.092 < -1.645$ NO! → non la rifiuto

la differenza non è significativa

$$u = \frac{0.4 - 0.47}{\sqrt{0.44 \cdot 0.56 \cdot \left(\frac{1}{90} + \frac{1}{110}\right)}}$$

$u = -0.992$

Fino ad ora
Test parametrici
ora cambio

Test χ^2 di adattamento (p_i)

⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
18	23	16	19	25	19

Totale 120 lanci ← classi (6)

← numerosità osservata O_i

se rifiutiamo H_0 il dado è truccato

$\begin{cases} H_0 & \text{c'è adattamento} \\ H_1 & \text{non c'è adattamento} \end{cases}$

← numerosità teoriche E_i

20 20 20 20 20 20

classi $c_1\ c_2\ c_3 \ldots c_k$

numer. oss $O_1\ O_2\ O_3 \ldots O_k$

num teoriche $E_1\ E_2\ E_3 \ldots E_k$

$O_i - E_i$ non ci interessa il segno ⋯→ $(O_i - E_i)^2$ ⋯→

$$U = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

→ n° simili numero basso

→ se dati fanno poeni con teoriche n° alto

Rifiuto H_0 se U è "troppo grande"

$U > \chi^2_{\alpha;\, k-1}$

il continuo

$\alpha = 5\%$ $\chi^2_{0.05;\,5} = 11.07$

$$U = \frac{(18-20)^2}{20} + \frac{(23-20)^2}{20} + \frac{(16-20)^2}{20} + \frac{(19-20)^2}{20} + \frac{(25-20)^2}{20} + \frac{(19-20)^2}{20} = 2.8$$

? $2.8 > 11.07$ no! → non posso rifiutare

Test χ^2 di indipendenza

$(x_1, y_1) \ldots\ldots (x_n, y_n)$

$\begin{cases} H_0 & \text{non c'è legame} & (x; y \text{ si dipendenti}) \\ H_1 & \text{c'è legame} & (x; y \text{ no dipendenza}) \end{cases}$

supponiamo di avere i voti di 2 sezioni

numerosità osservate	insuff	suff	buono	
sez A	21	36	43	100
sez B	29	24	47	100
	50	60	90	200

Test χ^2 d'indipendenza

$x_n \backslash y_n$	D_1	D_2	…	D_n	
C_1	$O_{1,1}$				$O_{1\cdot}$
C_2	$O_{2,1}$				$O_{2\cdot}$
$C_{..}$					
C_K	$O_{K,1}$				$O_{K\cdot}$
	$O_{\cdot 1}$	$O_{\cdot 2}$		$O_{\cdot n}$	

le probabilità sono indipendenti → prodotto

$n = \sum O_{\cdot \beta}$ → numerosità campione

$E_{ij} = \frac{O_{i\cdot} O_{\cdot j}}{n} = n \cdot \frac{O_{i\cdot}}{n} \cdot \frac{O_{\cdot j}}{n}$

Teorico	INS	SUFF	BUONO	
SEZ A	25	30	45	100
SEZ B	25	30	45	100
	50	60	90	200

$$u = \sum_{ij} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

Rif H_0 se $u > \chi^2_{\alpha;\,(k-1)\cdot(h-1)}$

$$u = \frac{(21-25)^2}{25} + \frac{(36-30)^2}{30} + \frac{(43-45)^2}{45} + \frac{(29-25)^2}{25} + \frac{(24-30)^2}{30} + \frac{(47-45)^2}{45} \simeq 3.87$$

$\alpha = 5\%$

Righe $2(-1) = 1$

Colonne $3(-1) = 2$

$\rightarrow \chi^2_{0.05;2} =$

$u >$

$\Rightarrow$ non c'è dipendenza