Esercizio 3. Siano

$$u := (0,2,0,1), \quad v := (2,0,0,0)$$
$$V := \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = x + t = 0 \}.$$

Esiste unico $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ tale che $f(u) = u - v$, $f(v) = u + v$, $V \subseteq \ker(f)$. Determinare $M(f)$.

Svolgimento. Per calcolare $M(f)$ è necessario determinare $f(e_i)$. A tale scopo si può costruire una base $\mathcal{C}$ con i dati noti, determinare le immagini dei suoi vettori e, come nell'esercizio precedente, ottenere da queste informazioni le immagini dei vettori $f(e_i)$.

Si noti che i vettori $v_1 := u$ e $v_2 := v$ sono linearmente indipendenti. Una base di $\ker(f)$ è data dai vettori le cui componenti sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + t = 0. \end{cases}$$

Quindi $V = \mathcal{L}((0,1,1,0),(1,0,0,-1))$. Consideriamo i vettori $v_3 := (0,1,1,0)$ e $v_4 := (1,0,0,-1)$ e verifichiamo che $\mathcal{C} := (v_1, v_2, v_3, v_4)$ è base di $\mathbb{R}^4$. A tale scopo calcoliamo

$$\varrho \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando sulle righe

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

che è ridotta per colonne ed ha rango 4, dunque $\mathcal{C}$ è base. Risulta $e_1 = v_2/2$, $e_2 = v_1/2 - v_2/4 + v_4/2$, $e_3 = -v_1/2 + v_2/4 + v_3 - v_4/2$, $e_4 = v_2/2 - v_4$.

Risulta

$$f(v_1) = (-2,2,0,1), \quad f(v_2) = (2,2,0,1), \quad f(v_3) = f(v_4) = (0,0,0,0),$$

quindi

$$f(e_1) = (1,1,0,1/2), \quad f(e_2) = (-3/2,1/2,0,1/4),$$
$$f(e_3) = (3/2,-1/2,0,-1/4), \quad f(e_4) = (1,1,0,1/2),$$

da cui si ricava che

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$