DEF 2.11: Sia V uno spazio vettoriale su K. Il sottospazio si dice <u>sottospazio generato</u> da v_1, v_2, …, v_n, e v_1, v_2, …, v_n sono **generatori**.

DEF 2.12: Sia V uno spazio vettoriale su K. Sia (v_1, v_2, …, v_n) un insieme di vettori in V. L'insieme si dice **linearmente indipendente** se:

$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$ con $a_1, a_2, .., a_n = 0$

ovvero, se l'unico modo per ottenere 0 dalla combinazione lineare dei vettori è porre tutti gli scalari uguali a zero.

DEF 2.13: Sia (v_1, v_2, …, v_n) un insieme di vettori in V. L'insieme si dice **linearmente dipendente** se uno di loro può essere scritto come combinazione lineare degli altri.

DEF 2.14: Sia V uno spazio vettoriale su K. Una **base** di V è <u>un insieme di vettori linearmente indipendenti</u> che <u>generano</u> V.

DEF 2.15: Sia V uno spazio vettoriale su K. Sia S=(v_1, v_2, …, v_n) un insieme di generatori di V. Allora **S contiene una base di V**.

DEF 2.16: Sia V uno spazio vettoriale su K e sia B=(v_1, v_2, …, v_n) base di V. Allora, ogni elemento di V si scrive in modo **unico** come **combinazione** lineare dei vettori in B.

DEF 2.17: Data una base B=(v_1, v_2, …, v_n) di uno spazio V e dato un vettore $v \in V$, se $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$, gli scalari $a_1, a_2, .., a_n$ si dicono **coordinate alla base**.

DEF 2.18: Sia V uno spazio vettoriale su K e sia B=(v_1, v_2, …, v_n) base di V.

- Se (w_1, w_2, …, w_r) è un insieme di vettori **l.i.**, allora **$r \leq n$**
- Se (w_1, w_2, …, w_r) è un insieme di **generatori**, allora **$r \geq n$**
- Se (w_1, w_2, …, w_r) è una **base**, allora **$r = n$**

DEF 2.19: Dato uno s.v. V su un campo K, che ammette un insieme finito di generatori, il numero di vettori di una base si chiama la **dimensione** di V su K.

DEF 2.20: Sia V uno s.v. su K e sia S=(v_1, v_2, …, v_n) un insieme di vettori. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- S è una base di V.
- Dim in K di V = n e i vettori sono l.i.
- Dim in K di V = n e i vettori generano lo spazio.

Quindi : se dim di V = n, allora una base è:

- Un insieme di generatori l.i.
- Un insieme di n vettori che sono l.i.
- Un insieme di n vettori che generano V.

DEF 2.22: Se V è uno spazio vettoriale su K, generato da v_1, v_2, …, v_n e (w_1, w_2, …, w_r) è un insieme di vettori l.i. , allora esiste una base di V contenente w_1, w_2, …, w_r.

DEF 2.23: Se V è uno spazio vettoriale su K e W è un suo sottospazio, se dim in K di V = n, allora dim in K di W sarà ≤ n.

TEOREMA DELLO SCAMBIO: Sia V uno spazio vettoriale su K. Sia (v_1, v_2, …, v_n) un insieme di generatori di V. Se w_1, w_2, …, w_r sono r vettori di V l.i. allora possono **sostituire** r vettori in (v_1, v_2, …, v_n), in modo da mantenerlo generatore di V.

r ≤ n