Segue che $\varrho(M) = 3$, sicché $\dim(W) = 3$ e si vede che A, B, D sono linearmente indipendenti, quindi $\mathcal{B} := (A, B, D)$ è una base di W.

Si noti che $F = B + D \in W$. Si conclude che $[F]_{\mathcal{B}} = (0, 1, 1)$. Infine per completare $\mathcal{B} := (A, B, D)$ a base $\mathcal{C} := (A, B, D, G)$ di $\mathbb{R}^4$ è sufficiente aggiungere $G \notin W$. Poiché la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è ridotta per righe, basta scegliere $G := e_4$. In tale caso $[F]_{\mathcal{C}} = (0, 1, 1, 0)$.

Quiz

Quiz 1. Dati gli insiemi

$$A := \{\ (a, a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\ \}, \qquad B := \{\ (0, b, b, 0) \mid b \in \mathbb{R}\ \},$$

dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a) $A \cup B$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.
b) $A + B$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.
c) $(1, 1, 1, 1) \notin A + B$.
d) $(1, 2, 2, 1) \notin A + B$.

Svolgimento. Osserviamo preliminarmente che sia A che B sono sottospazi di $\mathbb{R}^{2,2}$.

L'affermazione a) è falsa. Infatti se $ab \neq 0$

$$(a, a, a, a) + (0, b, b, 0) \notin A \cup B.$$

L'affermazione b) è vera. Questo è noto dalla teoria: la somma di due sottospazi è sempre un sottospazio.

L'affermazione c) è falsa. Infatti è noto dalla teoria che $A, B \subseteq A + B$. Quindi $(1, 1, 1, 1) \in A \subseteq A + B$.

L'affermazione d) è falsa. Infatti $(1, 1, 1, 1) \in A$, $(0, 1, 1, 0) \in B$, dunque $(1, 2, 2, 1) = (1, 1, 1, 1) + (0, 1, 1, 0) \in A + B$.

Quiz 2. Siano $V := \mathbb{R}^3$, $W \subseteq V$ il sottospazio avente base $\mathcal{B} := (e_1, e_3)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Il vettore $(1, 1, 1) \in W$.
b) $e_1 + e_3 \in W$ ed ha componenti $(1, 0, 1)$ rispetto a $\mathcal{B}$.
c) $e_1 + e_3 \in W$ ed ha componenti $(1, 1)$ rispetto a $\mathcal{B}$.
d) $e_1 + e_3 \in W$ ed ha componenti $(1, 1)$ rispetto alla base canonica di V.

Svolgimento. Ricordo che, convenzionalmente, $e_1 := (1, 0, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0)$, $e_3 := (0, 0, 1)$. In particolare $W = \{\ (a, 0, c) \in \mathbb{R}^3\ \}$.

L'affermazione a) è falsa. Infatti gli elementi di W hanno la seconda componente nulla.

L'affermazione b) è falsa. Infatti $\mathcal{B}$ è formata da due soli elementi, quindi le componenti di ogni elemento di W rispetto a $\mathcal{B}$ sono solo due.

L'affermazione c) è vera. Infatti $e_1 + e_3 = 1e_1 + 1e_3$.

L'affermazione d) è falsa. Infatti V ha dimensione 3, dunque le componenti di un suo elemento rispetto ad una sua qualsiasi base sono tre. Nel caso particolare, poiché la base canonica di V è $\mathcal{C} := (e_1, e_2, e_3)$, si ha $[e_1 + e_3]_{\mathcal{C}} = [(1, 0, 1)]_{\mathcal{C}} = (1, 0, 1)$.