

Esercizio 3. Risolvere, se possibile, i sistemi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento. Procediamo con operazioni elementari di riga sulla matrice completa del primo sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 8 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 8 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 14 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 8 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Quindi, indicando con x_1, x_2, x_3 le righe di $X \in \mathbb{R}^{3,2}$, il primo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = (8, 3) \\ -x_1 - x_3 = (3, 0) \\ x_3 = (6, -4), \end{cases}$$

da cui si ricava $x_2 = (20, -5)$ e $x_1 = (-9, 4)$. In particolare il primo sistema ha come unica soluzione la matrice

$$X := \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 20 & -5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Prima di tutto ci riconduciamo alla forma $AX = B$ mediante trasposizione. Il secondo sistema è equivalente a

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} \\ x_{1,3} & x_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Procediamo ora con operazioni elementari di riga sulla matrice completa del sistema così ottenuto:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Quindi, indicando con x_1, x_2, x_3 le colonne di $X \in \mathbb{R}^{2,3}$, il secondo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = (-4, 1) \\ x_1 + x_3 = (3, 0) \\ x_3 = (9, -2), \end{cases}$$

da cui si ricava $x_2 = (13, -3)$ e $x_1 = (-6, 2)$. In particolare il primo sistema ha come unica soluzione la matrice

$$X = \begin{pmatrix} -6 & 13 & 9 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$