

Lezione 23

23.1 Ellisse, iperbole, parabola

La parte finale del corso riguarda l'applicazione della teoria delle forme quadratiche e della riduzione ortogonale allo studio di alcuni oggetti geometrici detti "coniche" e "quadriche".

Cominciamo con un veloce ripasso di alcune figure geometriche che sicuramente il lettore ha già incontrato nei suoi studi: l'iperbole, l'ellisse, la parabola (che, nel seguito, chiameremo *coniche classiche*).

Nei seguenti esempi supporremo fissato un sistema di riferimento Oxy nel piano: osserviamo che il sistema è indicato con Oxy invece di $O\vec{i}\vec{j}$ semplicemente perché in questi esempi è preferibile mettere l'accento sul nome delle coordinate di un punto piuttosto che sui versori.

Esempio 23.1 (Iperbole). Siano $a, b \in]0, +\infty[$ due numeri reali positivi. Si consideri

$$\mathcal{C} = \left\{ P = (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

$\mathcal{C}$ si dice *iperbole di semiassi a e b (in forma canonica)*. L'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{23.1.1}$$

si dice *equazione canonica di $\mathcal{C}$* .

L'iperbole $\mathcal{C}$ è simmetrica sia rispetto ad O sia rispetto agli assi coordinati: l'origine e gli assi coordinati vengono detti *centro* (in questo caso si parla di *conica a centro*) e *assi* di $\mathcal{C}$. L'asse delle ascisse viene detto *asse trasverso* o *asse reale*, quello delle ordinate *asse secondario* od *asse immaginario*. I punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con l'asse trasverso sono detti *vertici*: sono, nel nostro caso, i punti $(\pm a, 0)$. Talvolta le coppie $(0, \pm ib)$ sono detti *vertici immaginari*.

Determiniamo i punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con le rette parallele all'asse delle ordinate: ciò equivale a determinare le soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = k \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$: quindi ci riduciamo a risolvere l'equazione

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1.$$

Tale equazione ha sempre soluzioni (reali o complesse): ha però soluzioni reali (corrispondenti quindi a punti del piano) se e solo se $|k| \geq a$, ovvero se e solo se $\mathcal{C}$ è all'esterno della fascia $] -k, k[\times \mathbb{R}$. In particolare $\mathcal{C}$ ha, necessariamente, due componenti distinte che non si intersecano: $\mathcal{C}$ è, dunque, sconnessa.

Intersechiamo $\mathcal{C}$ con le rette per l'origine: ciò equivale a determinare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases}$$

al variare di $m \in \mathbb{R}$. Quindi ci riduciamo a risolvere l'equazione

$$(b^2 - m^2 a^2)x^2 = a^2 b^2.$$

Per $m = \pm b/a$ tale equazione non ha soluzioni (reali o complesse): le rette $y = \pm bx/a$ si dicono *asintoti* di $\mathcal{C}$. Per ogni altro valore di m l'equazione ha soluzioni (reali o complesse): tali soluzioni sono reali (corrispondenti quindi a punti del piano) se e solo se $|m| < b/a$, ovvero $\mathcal{C}$ è all'interno del cono delimitato dagli asintoti e contenente l'asse delle ascisse.

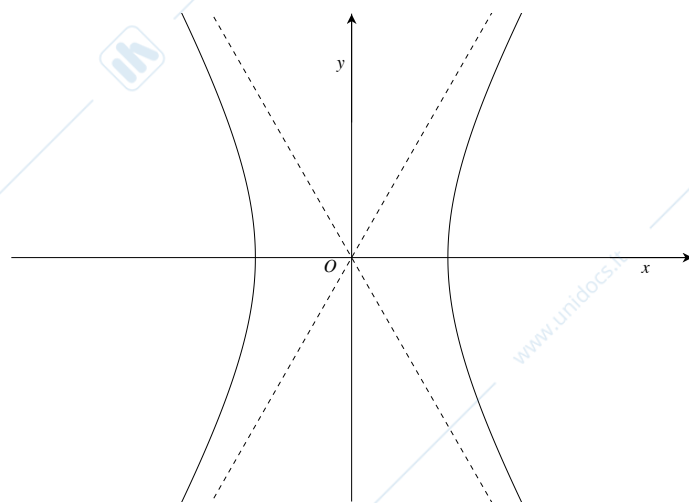


Figura 23.1

Si noti che gli asintoti di $\mathcal{C}$ sono perpendicolari fra loro se e solo se $a = b$: in tal caso si parla di *iperbole equilatera*.

Ricordiamo le due funzioni iperboliche

$$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2, \quad \sinh x = (e^x - e^{-x})/2.$$

Si noti che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$: quindi i punti delle due componenti connesse di $\mathcal{C}$ possono essere descritti parametricamente dai due sistemi

$$\begin{cases} x = a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a \cosh t \\ y = b \sinh t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

La figura 23.1 rappresenta la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$$

(con i suoi asintoti). ♠

Esempio 23.2 (Ellisse). Siano $a, b \in]0, +\infty[$ due numeri reali positivi. Si consideri

$$\mathcal{C} = \left\{ P = (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

$\mathcal{C}$ si dice *ellisse di semiassi a e b (in forma canonica)*: talvolta si parla anche di *ellisse reale* per distinguerla dall'ellisse immaginaria che sarà definita in seguito. L'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (23.1.2)$$

si dice *equazione canonica di $\mathcal{C}$* .

Come nel caso dell'iperbole, $\mathcal{C}$ è simmetrica sia rispetto ad O sia rispetto agli assi coordinati: l'origine e gli assi coordinati vengono detti *centro* (anche $\mathcal{C}$ è una *conica a centro*) ed *assi* di $\mathcal{C}$. I punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con i suoi assi vengono detti *vertici*: sono, nel nostro caso, $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$.

Intersecando con rette parallele agli assi e studiando le soluzioni delle equazioni di secondo grado che così si ottengono, è facile verificare che $\mathcal{C} \subseteq [-a, a] \times [-b, b]$.

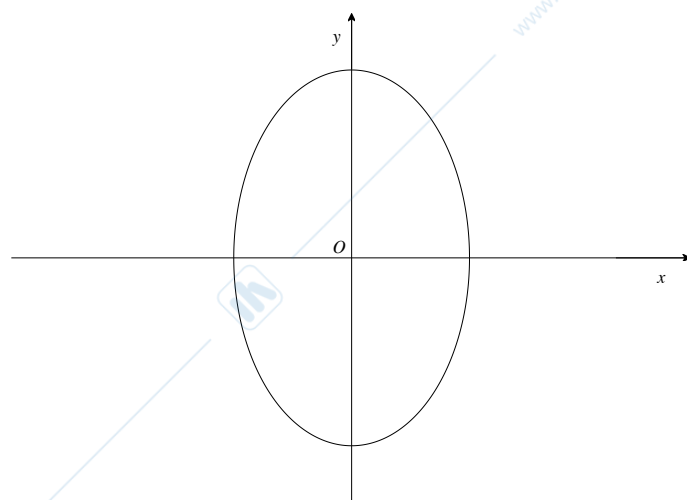


Figura 23.2

Si noti che più a si avvicina a b , più $\mathcal{C}$ tende ad assomigliare ad una circonferenza. Inoltre è facile convincersi che i suoi punti possono essere descritti parametricamente dal sistema

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

La figura 23.2 rappresenta la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Esempio 23.3 (Parabola). Sia $p \in]0, +\infty[$ un numero reale positivo. Si consideri

$$\mathcal{C} = \{ P = (x, y) \mid y^2 = 2px \}.$$

$\mathcal{C}$ si dice *parabola di parametro p (in forma canonica)*. L'equazione

$$y^2 = 2px \tag{23.1.3}$$

si dice *equazione canonica di $\mathcal{C}$* .

La parabola $\mathcal{C}$ è simmetrica rispetto all'asse delle ascisse: tale retta viene detta *asse*. Invece non esistono punti nel piano rispetto a cui $\mathcal{C}$ sia simmetrica (perciò $\mathcal{C}$ non è una conica a centro). Il punto di intersezione di $\mathcal{C}$ con l'asse delle ascisse viene detto *vertice*: esso è, nel nostro caso, O .

Intersecando con rette parallele agli assi e studiando le soluzioni delle equazioni di secondo grado che così si ottengono, è facile verificare che $\mathcal{C} \subseteq [0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

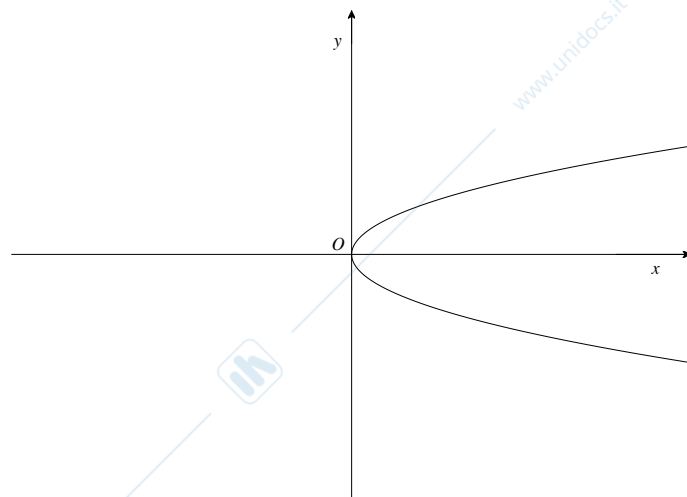


Figura 23.3

I punti di $\mathcal{C}$ possono essere descritti parametricamente dal sistema

$$\begin{cases} x = t^2/2p \\ y = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

La figura 23.3 rappresenta la parabola $\mathcal{C}$ di equazione

$$y^2 = x/3. \quad \spadesuit$$

Notiamo che tutte le coniche classiche sopra descritte sono luoghi geometrici definiti, rispetto ad un opportuno sistema di riferimento Oxy fissato nel piano, da equazioni di grado 2 nelle variabili x, y : se due di tali equazioni differiscono per una costante moltiplicativa non nulla, esse definiscono la stessa conica classica.

In maniera analoga abbiamo visto che, rispetto ad un opportuno sistema di riferimento Oxy fissato nel piano, ogni retta nel piano è individuata da un'equazione di grado 1 nelle variabili x, y (unica a meno di costanti moltiplicative non nulle). Di più abbiamo visto che, viceversa, ogni equazione di grado 1 nelle variabili x, y rappresenta una retta nel piano.

Viene allora naturale domandarsi se una tale proprietà vale anche per le equazioni di grado 2: cioè è vero o falso che ogni equazione di grado 2 nelle variabili x, y rappresenta un'ellisse, un'iperbole od una parabola? L'esempio seguente mostra che purtroppo ciò non accade.

Esempio 23.4. Si consideri la generica equazione

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma \quad (23.1.4)$$

e si noti che le equazioni (23.1.1) e (23.1.2) hanno questa forma. Chiaramente se $\alpha = \beta = 0$ il luogo geometrico $\{ P = (x, y) \mid \alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma \}$ o è vuoto (se $\gamma \neq 0$) o è tutto il piano (se $\gamma = 0$). Assumeremo nel seguito che $\beta \neq 0$: il motivo per cui tale scelta è possibile sarà chiarito nel prossimo paragrafo (si veda, in particolare, l'Esempio 23.5).

Ricordiamo inoltre che l'equazione (23.1.4) va intesa a meno di una costante moltiplicativa non nulla, poiché

$$\{ P = (x, y) \mid \alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma \} = \{ P = (x, y) \mid \lambda \alpha x^2 + \lambda \beta y^2 = \lambda \gamma \}$$

se $\lambda \neq 0$.

Analizziamo i vari casi possibili.

- (i) Se $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\gamma = 0$ si parla di *coppia iperbolica di rette incidenti*: spesso si parla anche di *iperbole degeneri*. Poiché

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = (\sqrt{\alpha}x + \sqrt{-\beta}y)(\sqrt{\alpha}x - \sqrt{-\beta}y)$$

(ricordiamo che $\beta < 0$, dunque $\sqrt{-\beta} \in \mathbb{R}$!), in tal caso il luogo geometrico

$$\{ P = (x, y) \mid \alpha x^2 + \beta y^2 = 0 \}$$

è l'unione delle due rette di equazioni $\sqrt{\alpha}x + \sqrt{-\beta}y = 0$ e $\sqrt{\alpha}x - \sqrt{-\beta}y = 0$.

- (ii) Se $\alpha = 0, \beta, \gamma > 0$ si parla di *coppia iperbolica di rette parallele*: spesso si parla anche di *parabola degenerare reale*. In tal caso il luogo geometrico

$$\{ P = (x, y) \mid \beta y^2 = \gamma \}$$

è l'unione delle due rette di equazioni $\sqrt{\beta}y = \sqrt{\gamma}$ e $\sqrt{\beta}y = -\sqrt{\gamma}$.

- (iii) Se $\alpha = \gamma = 0$ si parla di *retta doppia*: in tal caso il luogo geometrico

$$\{ P = (x, y) \mid \beta y^2 = 0 \}$$

coincide con l'asse delle ascisse (ma contato con molteplicità due).

- (iv) Se $\alpha, \beta > 0, \gamma = 0$ si parla di *coppia ellittica di rette incidenti*: spesso si parla anche di *ellisse degenerare*. In tal caso il luogo geometrico

$$\{ P = (x, y) \mid \alpha x^2 + \beta y^2 = 0 \}$$

si riduce ad un solo punto, l'origine. Si noti che, anche in questo caso il polinomio di grado 2 si scompone in prodotto di polinomi di grado 1: infatti si ha

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = (\sqrt{\alpha}x + i\sqrt{\beta}y)(\sqrt{\alpha}x - i\sqrt{\beta}y).$$

La differenza rispetto al caso della coppia iperbolica di rette è che tali polinomi lineari hanno coefficienti complessi non reali.

- (v) Se $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma < 0$ si parla di *coppia ellittica di rette parallele*: spesso si parla anche di *parabola degenerare immaginaria*. Si noti che pur essendo

$$\{ P = (x, y) \mid \beta y^2 = \gamma \} = \emptyset,$$

ancora il polinomio di grado 2 si scompone in prodotto di polinomi di grado 1: infatti si ha

$$\beta y^2 - \gamma = (\sqrt{\beta}y + i\sqrt{-\gamma})(\sqrt{\beta}y - i\sqrt{-\gamma}).$$

Anche in questo caso tali polinomi lineari hanno coefficienti complessi non reali.

- (vi) Se $\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$ si parla di *ellisse immaginaria*. Anche in questo caso il luogo geometrico

$$\{ P = (x, y) \mid \alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma \}$$

è evidentemente vuoto.

Osserviamo che c'è una differenza sostanziale tra il caso dell'ellisse immaginaria e quello della coppia ellittica di rette parallele. Infatti, nel caso dell'ellisse immaginaria, il polinomio $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$ non si può scomporre come prodotto di due polinomi lineari, nè a coefficienti reali, nè a coefficienti complessi.

Infatti se fosse

$$\alpha x^2 + \beta y^2 - \gamma = (a'x + b'y + c')(a''x + b''y + c''),$$

dovrebbe essere $a'a'' = \alpha$. Se $\alpha \neq 0$ moltiplicando ambo i membri per l'inverso di $\alpha = a'a'' \in \mathbb{R}$ possiamo supporre $\alpha = a' = a'' = 1$.

Ci riconduciamo quindi a studiare l'uguaglianza

$$x^2 + \beta y^2 - \gamma = (x + b'y + c')(x + b''y + c'') :$$

quindi si deve avere $b'b'' = \beta$, $c'c'' = -\gamma$ e $b' + b'' = c' + c'' = b'c'' + b''c' = 0$, dunque $b'' = -b'$, $c'' = -c'$, $-2b'c' = 0$, quindi o $c' = 0$ (da cui $\gamma = 0$) o $b' = 0$ (da cui $\beta = 0$).

Ragionando in maniera analoga ci si convince che anche le equazioni dell'ellisse, dell'iperbole e della parabola non si possono scomporre come prodotto di due polinomi lineari, nè a coefficienti reali, nè a coefficienti complessi. ♠

23.2 Rototraslazioni nel piano

Dalle considerazioni fatte nel paragrafo precedente, sorge in maniera naturale il problema seguente: fissato nel piano un sistema di riferimento Oxy e dato un polinomio di grado 2 nelle variabili x, y a meno di costanti moltiplicative non nulle, diciamo

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

($a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, a, b, c non simultaneamente nulli), vogliamo descrivere il luogo (eventualmente vuoto)

$$\mathcal{C} = \{ P = (x, y) \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \}.$$

In particolare, se possibile, vogliamo disegnare tale luogo geometrico.

Come visto negli esempi del paragrafo 23.1, siamo in grado di dare una tale descrizione se il polinomio è di forma particolarmente semplice: ciò dipende dal fatto che il luogo $\mathcal{C}$ ha delle particolari simmetrie rispetto al sistema di riferimento fissato Oxy .

È allora naturale porsi i seguenti due quesiti.

- (Q1) Sia $O'x'y'$ un sistema di riferimento: come sono legate le coordinate (x, y) e (x', y') di uno stesso punto nei due sistemi di riferimento?
- (Q2) Conoscendo una descrizione in termini di equazioni rispetto al sistema di riferimento Oxy di un certo luogo geometrico $\mathcal{C}$, esiste un modo per descriverlo con equazioni anche rispetto al sistema di riferimento $O'x'y'$?

Iniziamo a rispondere al secondo quesito. Supponiamo che sia

$$\mathcal{C} = \{ P = (x, y) \mid q(x, y) = 0 \}$$

ove $q(x, y)$ è una qualche espressione matematica funzione delle variabili x e y . Supponiamo poi che ci sia un legame fra le coordinate (x, y) ed (x', y') di uno stesso punto P rispetto ad i due sistemi di riferimento Oxy ed $O'x'y'$ del tipo

$$\begin{cases} x = f(x', y'), \\ y = g(x', y'). \end{cases}$$

Allora $P \in \mathcal{C}$ se e solo se P ha coordinate $(\bar{x}, \bar{y})$ tali che $q(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, cioè se e solo se le coordinate $(\bar{x}', \bar{y}')$ per cui

$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}', \bar{y}'), \\ \bar{y} = g(\bar{x}', \bar{y}') \end{cases}$$

soddisfano $q(f(\bar{x}', \bar{y}'), g(\bar{x}', \bar{y}')) = 0$. Concludiamo che è possibile descrivere $\mathcal{C}$ anche nel sistema di riferimento $O'x'y'$ in termini di equazioni: precisamente abbiamo

$$\mathcal{C} = \{ P = (x', y') \mid q(f(x', y'), g(x', y')) = 0 \}.$$

Esempio 23.5. Sia Oxy un sistema di riferimento fissato nel piano e sia

$$\mathcal{C} = \{ P = (x, y) \mid x^2 - 2y^2 = -1 \}.$$

Si consideri ora un sistema di riferimento $Ox'y'$ ottenuto da Oxy ruotando di un angolo $\pi/2$ in senso antiorario. Allora $x' = y$ e $y' = -x$: quindi

$$\mathcal{C} = \{ P = (x', y') \mid 2x'^2 - y'^2 = 1 \}.$$

Concludiamo che $\mathcal{C}$ è un'iperbole e possiamo anche tracciarne il disegno utilizzando quanto visto nell'Esempio 23.1.

Con un ragionamento simile deduciamo che è sempre possibile supporre $\beta \neq 0$ nell'Esempio 23.4. ♠

Passiamo ora al primo quesito. Supponiamo che il semiasse positivo delle x' formi un angolo φ (misurato in senso antiorario) con il semiasse positivo delle x e che le coordinate di O' rispetto al sistema di riferimento Oxy siano (u, v) .

Per passare dal Oxy ad $O'x'y'$ si può procedere in due modi. Possiamo ruotare in senso antiorario il sistema di riferimento Oxy di un angolo φ ottenendo un sistema di riferimento "ausiliario" $O\hat{x}\hat{y}$ e poi traslare quest'ultimo in modo da portare la sua origine in O' . Oppure possiamo prima traslare Oxy portando la sua origine a coincidere con O' ed ottenendo un sistema di riferimento "ausiliario" $O'\hat{x}\hat{y}$ e poi ruotare quest'ultimo di un angolo φ in senso antiorario.

In entrambi i casi abbiamo decomposto la nostra trasformazione in due trasformazioni più elementari, una *rotazione* ed una *traslazione*: per questo motivo parleremo di *rototraslazione* quando ci riferiremo a trasformazioni di coordinate nel piano.

Iniziamo a ricordare cosa accade nel caso in cui non ci sia traslazione, cioè $O = O'$. Siano $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{I}, \vec{J}$ i versori degli assi coordinati naturalmente associati ad i due sistemi di riferimento Oxy ed $O'x'y'$ rispettivamente. Se P è un punto di coordinate (x, y) rispetto a Oxy e (x', y') rispetto a $O'x'y'$ risulta

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{I} + y'\vec{J}. \quad (23.2.1)$$

Poiché $(\vec{i}, \vec{j})$ è una base ortonormale di $V_2(O)$ segue che

$$\vec{I} = \langle \vec{I}, \vec{i} \rangle \vec{i} + \langle \vec{I}, \vec{j} \rangle \vec{j}, \quad \vec{J} = \langle \vec{J}, \vec{i} \rangle \vec{i} + \langle \vec{J}, \vec{j} \rangle \vec{j}.$$

Ma, poiché $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{I}| = |\vec{J}| = 1$, segue che

$$\langle \vec{I}, \vec{i} \rangle = \cos \varphi, \quad \langle \vec{I}, \vec{j} \rangle = \cos(\pi/2 - \varphi) = \sin \varphi,$$

$$\langle \vec{J}, \vec{i} \rangle = \cos(\pi/2 + \varphi) = -\sin \varphi, \quad \langle \vec{J}, \vec{j} \rangle = \cos \varphi,$$

dunque

$$\begin{cases} \vec{I} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}, \\ \vec{J} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \end{cases} \quad (23.2.2)$$

Sostituendo le relazioni (23.2.2) nelle relazioni (23.2.1) si ottiene allora

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} = x' \cos \varphi \vec{i} + x' \sin \varphi \vec{j} - y' \sin \varphi \vec{i} + y' \cos \varphi \vec{j}.$$

Abbiamo perciò scritto lo stesso vettore geometrico come combinazione lineare degli elementi della base $(\vec{i}, \vec{j})$ in due modi diversi, quindi i coefficienti di $\vec{i}$ e $\vec{j}$ nelle due espressioni devono coincidere ordinatamente: eguagliandoli otteniamo, come già visto ripetutamente in precedenza, le relazioni

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, \end{cases}$$

o, in forma matriciale,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (23.2.3)$$

Passiamo a descrivere il caso in cui non ci sia rotazione, cioè $\varphi = 0$. Siano $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{I}, \vec{J}$ i versori degli assi coordinati naturalmente associati ai due sistemi di riferimento Oxy ed $O'x'y'$ rispettivamente. Se P è un punto di coordinate (x, y) rispetto a Oxy e (x', y') rispetto a $O'x'y'$ risulta ancora

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} = \overrightarrow{OO'} + (P - O'). \quad (23.2.4)$$

Se (u, v) sono le coordinate di O' rispetto a Oxy , poiché $\overrightarrow{OP} = x'\vec{I} + y'\vec{J}$, si ha

$$\overrightarrow{OO'} = u\vec{i} + v\vec{j}, \quad P - O' = x'\vec{i} + y'\vec{j},$$

quindi la relazione (23.2.4) diviene

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + u\vec{i} + v\vec{j}.$$

Abbiamo perciò scritto lo stesso vettore geometrico come combinazione lineare degli elementi della base $(\vec{i}, \vec{j})$ in due modi diversi, quindi i coefficienti di $\vec{i}$ e $\vec{j}$ nelle due espressioni devono coincidere: eguagliandoli otteniamo

$$\begin{cases} x = x' + u \\ y = y' + v, \end{cases}$$

o, in forma matriciale,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (23.2.5)$$

Concludiamo il paragrafo con la seguente risposta al quesito (Q1).

Proposizione 23.6. *Nel piano siano fissati due sistemi di riferimento Oxy e $O'x'y'$. Si assuma che il semiasse positivo delle x' formi un angolo φ (misurato in senso antiorario) con il semiasse positivo delle x e che le coordinate di O' rispetto al sistema di riferimento Oxy siano (u, v) .*

Le coordinate (x, y) e (x', y') di uno stesso punto P in Oxy e $O'x'y'$ rispettivamente sono legate dalle seguenti relazioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Si decomponga la rototraslazione nella traslazione che porta il vecchio sistema di riferimento Oxy in quello ausiliario $O'\hat{x}\hat{y}$ seguita dalla rotazione in senso antiorario dell'angolo φ che porta il sistema di riferimento ausiliario $O'\hat{x}\hat{y}$ in quello nuovo $O'x'y'$. Allora le formule (23.2.3) e (23.2.5) diventano rispettivamente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Eliminando $\hat{x}$ e $\hat{y}$ tra le due equazioni matriciali otteniamo la tesi. □