Lezione 15

15.1 Il metodo degli scarti

Sia dato uno spazio vettoriale V su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e siano $v_1, \dots, v_n \in V$ vettori fissati. Quanto visto nella lezione precedente ci suggerisce il seguente algoritmo per stabilire se tali vettori sono linearmente indipendenti oppure dipendenti. Tale procedimento, detto *metodo degli scarti*, ci permette di ricavare da un qualsiasi insieme di vettori un sottoinsieme di vettori che siano anche linearmente indipendenti.

Passo (1). Se $v_1 = 0_V$, allora si scarta v_1 e si riparte, rinominando tutti i vettori rimanenti come $v_1, v_2, \dots$; se invece $v_1 \neq 0_V$, andiamo al passo (2).

Passo (2). Se $v_2 = \lambda v_1$, allora si scarta v_2 e si riparte, rinominando tutti i vettori rimanenti come $v_2, v_3, \dots$; se invece $v_2 \neq \lambda v_1$, andiamo al passo (3).

$\vdots$

Passo (i). Se $v_i \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1})$, allora si scarta v_i e si riparte, rinominando tutti i vettori rimanenti come $v_i, v_{i+1}, \dots$; se invece $v_i \notin \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1})$, andiamo al passo (i+1).

Ovviamente l'algoritmo di cui sopra non produce nessun risultato se $V = \{ 0_V \}$.

Si noti che, se a un certo passo, risulta $v_i \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1})$, allora scartando tale vettore v_i non si cambia il sottospazio, cioè $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}) = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_i)$. Infatti, chiaramente, ogni vettore che è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_{i-1}$ lo è anche di $v_1, \dots, v_i$, cioè $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}) \subseteq \mathcal{L}(v_1, \dots, v_i)$.

Viceversa sia $v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1}$: se $v \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_i)$, si ha

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_i v_i \\ &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_i(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_i \lambda_1) v_1 + \cdots + (\alpha_{i-1} + \alpha_i \lambda_{i-1}) v_{i-1} \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}), \end{aligned}$$

dunque $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}) \supseteq \mathcal{L}(v_1, \dots, v_i)$. In particolare, con il metodo degli scarti ad ogni passo i vettori considerati possono eventualmente diminuire, ma il sottospazio che essi generano rimane invariato.

L'utilità di tale algoritmo sarà chiara tra poco, quando parleremo di basi.

Esempio 15.1. Nello spazio $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (2, 1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 0, 0)$, $v_4 = (1, 1, 0, 0)$, $v_5 = (4, 4, 0, 1)$. Vogliamo trovare un sottoinsieme di $\{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ costituito da vettori linearmente indipendenti e che generano il sottospazio $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$: a tale scopo applichiamo il metodo degli scarti.

Passo (1). Innanzi tutto $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^4}$, quindi possiamo considerarlo come primo elemento del sottoinsieme cercato e passare a v_2.

Passo (2). Si ha $v_2 \notin \mathcal{L}(v_1)$: infatti se esistesse $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $v_2 = \alpha v_1$, confrontando l'ultima componente dei due vettori ricaveremmo $\alpha = 0$ e quindi $v_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Dunque possiamo prendere v_2 come secondo elemento del nostro sottoinsieme e passare a v_3.

Passo (3). Chiaramente $v_3 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$ (in quanto $v_3 = 0v_1 + 0v_2$), quindi lo scartiamo e passiamo a v_4.

Passo (4). Se valesse $v_4 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$, esisterebbero $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tali che $v_4 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ cioè

$$\alpha_1(1, 2, -1, 1) + \alpha_2(2, 1, 1, 0) = (\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1) = (1, 1, 0, 0).$$

Confrontando l'ultima componente dei due vettori segue $\alpha_1 = 0$, dunque, dalla penultima, $\alpha_2 = 0$, sicché dovrebbe essere $v_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Quindi possiamo considerare v_4 come terzo elemento del nostro sottoinsieme e passare a v_5.

Passo (5). In questo caso si verifica facilmente che $v_5 \in \mathcal{L}(v_1, v_2, v_4)$: infatti si ha che $v_1 + v_2 + v_4 = v_5$, per tale motivo il vettore v_5 è da scartare.

Concludiamo che il sottoinsieme cercato è $\{ v_1, v_2, v_4 \}$: in particolare $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_4) = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \subset \mathbb{R}^4$. Osserviamo che il vettore $e_1 = (1, 0, 0, 0) \notin \mathcal{L}(v_1, v_2, v_4)$: infatti la relazione

$$\alpha_1(1, 2, -1, 1) + \alpha_2(2, 1, 1, 0) + \alpha_3(1, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$$

si traduce nel sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

che è incompatibile.

Il lettore verifichi che se si applica l'algoritmo a partire dall'ultimo vettore, si ottiene un altro sottoinsieme, sempre costituito da tre vettori: non cambia invece il sottospazio generato, che è sempre $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$. ♠

15.2 Basi di uno spazio vettoriale

Vogliamo ora confrontare le nozioni di generatori e indipendenza lineare introdotte in precedenza. A tale scopo sia V uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e siano

$v_1, \ldots, v_n \in V$ suoi generatori linearmente indipendenti. Allora se $v \in V$ è un qualsiasi vettore esistono scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tali che

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

dunque $v_1, \ldots, v_n, v$ sono vettori linearmente dipendenti dalla Proposizione 14.17.

D'altro canto, per la stessa Proposizione, nessuno dei vettori v_i è combinazione lineare dei rimanenti, quindi i rimanenti vettori non sono più generatori di V.

In particolare, rispetto alla relazione di inclusione, gli insiemi di generatori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale finitamente generato sono i sottoinsiemi *minimali* di generatori ed i sottoinsiemi *massimali* di vettori linearmente indipendenti.

Per questo motivo (e per molti altri che saranno chiari nel seguito) tali sottoinsiemi rivestono una particolare importanza e meritano un nome particolare.

Definizione 15.2 (Basi di uno spazio vettoriale). Siano V uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$ vettori.

L' insieme ordinato $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ si dice *base* di V se:

(B1) $V = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$, cioè $v_1, \ldots, v_n$ sono generatori di V;

(B2) $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

Chiaramente, perché si possa parlare di base secondo la definizione data, lo spazio vettoriale V deve essere finitamente generato e $V \neq \{ 0_V \}$.

Un'importante proprietà dei sistemi di generatori linearmente indipendenti, quindi anche delle basi, è la seguente.

Proposizione 15.3. *Sia V uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una sua base fissata. Per ogni vettore $v \in V$ esiste unico $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ tale che*

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Dimostrazione. Poiché $V = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$, esiste una n–upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ tale che $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Per dimostrarne l'unicità supponiamo che sia anche $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ per qualche altro $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in K^n$. Allora

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n,$$

dunque

$$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0_V;$$

poiché $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, segue che $\alpha_1 - \beta_1 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0$, cioè $\alpha_i = \beta_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. □

Definizione 15.4 (Componenti di un vettore rispetto a una base). Sia V uno spazio vettoriale su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Se $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ è una base di V definiamo *componenti* di $v \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ l'unico elemento $[v]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ tale che

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Osservazione 15.5. Sia V uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una sua base. Chiaramente le componenti del vettore nullo sono $[0_V]_\mathcal{B} = 0_{K^n} \in K^n$.

Siano poi $v', v'' \in V$ con

$$[v']_\mathcal{B} = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) \in K^n, \quad [v'']_\mathcal{B} = (\alpha''_1, \ldots, \alpha''_n) \in K^n;$$

poiché ciò significa che

$$v' = \alpha'_1 v_1 + \cdots + \alpha'_n v_n, \qquad v'' = \alpha''_1 v_1 + \cdots + \alpha''_n v_n,$$

risulta anche

$$v' + v'' = \alpha'_1 v_1 + \cdots + \alpha'_n v_n + \alpha''_1 v_1 + \cdots + \alpha''_n v_n = (\alpha'_1 + \alpha''_1)v_1 + \cdots + (\alpha'_n + \alpha''_n)v_n,$$

ovvero

$$[v' + v'']_\mathcal{B} = (\alpha'_1 + \alpha''_1, \ldots, \alpha'_n + \alpha''_n) \in K^n.$$

Concludiamo che *le componenti rispetto ad una base della somma di due vettori sono la somma delle componenti rispetto alla stessa base dei due vettori.*

In maniera simile il lettore verifichi che se $\lambda \in K$ e $v \in V$ allora

$$[\lambda v]_\mathcal{B} = \lambda [v]_\mathcal{B}.$$

Per capire meglio il concetto di base e componenti di un vettore rispetto ad essa prendiamo in considerazione alcuni esempi.

Esempio 15.6. Fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$, la terna ordinata $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ è una base di $V_3(O)$ in forza degli Esempi 14.5 e 14.13. ♠

Esempio 15.7. In $\mathbb{R}^3$ si considerino $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Allora $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ è una base di V dagli Esempi 14.5 e 14.14. Tale base viene detta *base canonica di* $\mathbb{R}^3$. Se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, allora chiaramente

$$[(x, y, z)]_\mathcal{C} = (x, y, z).$$

Invece i vettori e_1, e_2 non possono formare in nessun ordine una base di $\mathbb{R}^3$, poiché, pur essendo linearmente indipendenti, non sono generatori (si veda l'Esempio 14.4): infatti

$$\mathcal{L}(e_1, e_2) = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\ \}.$$

In particolare $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ è una base del sottospazio $\mathcal{L}(e_1, e_2) \subseteq \mathbb{R}^3$, ma non di $\mathbb{R}^3$. Poiché si ha $(x, y, 0) = xe_1 + ye_2$, allora

$$[(x, y, 0)]_\mathcal{B} = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ovviamente anche $\mathcal{B}' = (e_2, e_1)$ è base dello stesso sottospazio ma si osservi che

$$[(x, y, 0)]_{\mathcal{B}'} = (y, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Si noti che anche i vettori e_1, e_2 e $e = (1, 1, 0)$ sono generatori dello stesso sottospazio $\mathcal{L}(e_1, e_2) \subseteq \mathbb{R}^3$, poiché si ha

$$(x, y, 0) = xe_1 + ye_2 + 0e = (x - y)e_1 + 0e_2 + ye = 0e_1 + (y - x)e_2 + xe,$$

ma in nessun ordine essi possono formare una base di tale sottospazio essendo linearmente dipendenti: infatti $e = e_1 + e_2$.

Più in generale sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Allora l'insieme ordinato $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ di vettori di K^n è una base, detta *base canonica di* K^n. Poiché, scelto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, si ha

$$\begin{array}{r} x_1(1, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0)+ \\ x_2(0, 1, 0, 0, \ldots, 0, 0)+ \\ x_3(0, 0, 1, 0, \ldots, 0, 0)+ \\ \vdots \qquad\qquad \\ x_{n-1}(0, 0, 0, 0, \ldots, 1, 0)+ \\ x_n(0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 1) = \\ \hline (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) \end{array}$$

risulta $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, quindi

$$[(x_1, \ldots, x_n)]_{\mathcal{C}} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n.$$

♠

Esempio 15.8. In $\mathbb{C}^{2,2}$ si considerino i vettori

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'insieme ordinato $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ è una base di $K^{2,2}$ (si vedano gli Esempi 14.6 e 14.14). Inoltre, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

risulta

$$[A]_{\mathcal{B}} = (a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2}) \in \mathbb{C}^4,$$

cioè la base $\mathcal{B}$ permette in un certo senso di "stirare" gli elementi di $\mathbb{C}^{2,2}$ trasformandoli in elementi di $\mathbb{C}^4$.

Più in generale nello spazio vettoriale $K^{m,n}$ l'insieme ordinato

$$\mathcal{B} = (E_{i,j} | 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$$

è una base, e se $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, si ha $[A]_{\mathcal{B}} = (a_{i,j} | 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n) \in K^{m,n}$. ♠

Il metodo degli scarti ci permette anche di dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 15.9. *Sia* $V \neq \{ 0_V \}$ *uno spazio vettoriale su un campo* $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *e siano* $v_1, \ldots, v_n \in V$ *vettori.*

(i) *Se $v_1, \dots, v_n$ sono generatori (e quindi V è finitamente generato), allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V i cui elementi sono vettori dell'insieme $\{ v_1, \dots, v_n \}$: in particolare esistono basi di V. In altre parole, da ogni insieme di generatori si può estrarre una base.*

(ii) *Se V è finitamente generato e $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V i cui primi n vettori sono $v_1, \dots, v_n$. In altre parole, ogni insieme di vettori linearmente indipendenti può essere completato a una base.*

Dimostrazione.

(i) L'affermazione è conseguenza immediata del metodo degli scarti partendo da un insieme di generatori, che possiamo supporre non nulli poiché $V \neq \{ 0_V \}$.

(ii) Sappiamo che esiste un sistema di generatori di V, ad esempio $V = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_m)$. Chiaramente
$$V = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_m) \subseteq \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m) \subseteq V$$
quindi anche $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m$ sono generatori di V: se applichiamo il metodo degli scarti all'insieme (ordinato) di generatori $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m$ nessuno dei primi n vettori può essere scartato (perché nessuno di loro dipende da quelli che lo precedono essendo i vettori $v_1, \dots, v_n$ linearmente indipendenti). Quindi l'insieme che si ottiene dopo aver applicato il metodo degli scarti a $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m$ contiene tutti i vettori $v_1, \dots, v_n$ e, per quanto osservato al paragrafo precedente, è ancora un sistema di generatori di $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m)$: fissato un ordine otteniamo allora una base contenente i vettori dati. □

Esempio 15.10. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i cinque vettori $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (2, 1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 0, 0)$, $v_4 = (1, 1, 0, 0)$, $v_5 = (4, 4, 0, 1)$. Vogliamo trovare un sottoinsieme di $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ costituito da vettori linearmente indipendenti. Applicando il metodo degli scarti abbiamo costruito nell'Esempio 15.1 la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_4)$ del sottospazio $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ di $\mathbb{R}^4$.

In particolare i vettori v_1, v_2, v_4 sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$, dunque è possibile completarli a una base. Consideriamo la base canonica $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ di $\mathbb{R}^4$ e applichiamo il metodo degli scarti all'insieme ordinato $v_1, v_2, v_4, e_1, e_2, e_3, e_4$: verifichiamo che $e_1 \notin \mathcal{L}(v_1, v_2, v_4)$. Infatti abbiamo visto nell'Esempio 15.1 che l'equazione vettoriale
$$\alpha_1(1, 2, -1, 1) + \alpha_2(2, 1, 1, 0) + \alpha_3(1, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$$
non ha soluzione. Concludiamo che esiste una base di $\mathbb{R}^4$ i cui primi elementi sono v_1, v_2, v_4, e_1.

Osserviamo poi che $e_2, e_3, e_4 \in \mathcal{L}(v_1, v_2, v_4, e_1)$: infatti
$$\begin{aligned} e_2 &= 0(1, 2, -1, 1) + 0(2, 1, 1, 0) + (1, 1, 0, 0) - (1, 0, 0, 0), \\ e_3 &= 0(1, 2, -1, 1) + (2, 1, 1, 0) - (1, 1, 0, 0) - (1, 0, 0, 0), \\ e_4 &= (1, 2, -1, 1) + (2, 1, 1, 0) - 3(1, 1, 0, 0) + 0(1, 0, 0, 0), \end{aligned}$$
quindi l'insieme $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_4, e_1)$ è una base di $\mathbb{R}^4$, diversa dalla base canonica $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. ♠