

**Quiz 3.** Dati gli insiemi

$$A := \{ (a, b, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}, \quad B := \{ (a, 0, 0, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \},$$

dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

- $A \cap B = \emptyset$ .
- $A \cap B$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  di dimensione 2.
- $A + B$  contiene quattro elementi linearmente indipendenti.
- $A \subseteq B$ .

*Svolgimento.* Osserviamo preliminarmente che  $A$  e  $B$  sono sottospazi.

L'affermazione a) è falsa. Infatti dalla teoria è noto che l'intersezione di due sottospazi è ancora un sottospazio, in particolare è non vuota. Nel caso particolare si verifica facilmente che  $B \subseteq A$ , dunque  $A \cap B = B$ .

L'affermazione b) è vera. Infatti segue dall'osservazione che  $A \cap B$  che ha dimensione 2 poiché  $B = \mathcal{L}(e_1, e_4)$ .

L'affermazione c) è falsa. Infatti essendo  $B \subseteq A$  segue che  $A + B = A$ , e si  $A = \mathcal{L}(e_1, e_4, e)$  ove  $e = (0, 1, 1, 0)$ . Quindi  $\dim(A + B) = \dim(A) = 3$ .

L'affermazione d) è falsa. Chiaramente  $e \in A \setminus B$ .

**Quiz 4.** Sia

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- $\rho(A) = 2$  per ogni  $h \neq 0$ .
- $A$  è invertibile per  $h = 1/5$ .
- Per ogni  $h$  le colonne di  $A$  sono una base di  $\mathbb{R}^3$ .
- Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

*Svolgimento.* Operando sulle righe della matrice si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + hR_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3h & 1-2h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3hR_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-5h \end{pmatrix}.$$

L'affermazione a) è falsa. Infatti se  $1 - 5h \neq 0$  risulta  $\rho(A) = 3$ .

L'affermazione b) è falsa. Infatti se  $h = 1/5$  risulta  $1 - 5h = 0$ , dunque  $\rho(A) = 2$  e, dalla teoria generale, è noto che una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo.

L'affermazione c) è falsa. Infatti se  $h = 1/5$  (e solo in questo caso), risulta  $1 - 5h = 0$ , dunque  $\rho(A) = 2$ , mentre  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ .

Per esclusione l'affermazione d) risulta essere vera.

**Quiz 5.** Siano

$$V := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0 \}, \quad W := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z \}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- $V \cap W = \emptyset$ .
- $V \cup W$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^3$ .
- $V + W = \mathcal{L}((1, 1, 1))$ .
- $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W)$