

# Lezione 7

## 7.1 Vettori geometrici

In questa lezione inizieremo a studiare enti geometrici quali *punti*, *segmenti (orientati)*, *rette*, *piani* sia nel piano  $S_2$  che nello spazio  $S_3$  con l'ordinaria struttura euclidea della distanza: in tali  $S_n$  cioè valgono gli assiomi della geometria euclidea.

Per fare questo introdurremo la nozione di vettore applicato (nel piano e nello spazio ordinari), per poi passare dalla geometria all'algebra dei vettori: daremo cioè una struttura "algebrica" a tali enti geometrici che ci permetterà di definire operazioni quali somma e prodotto e di algebrizzare problemi di tipo geometrico.

Per arrivare alla nozione di vettore occorre innanzi tutto ricordare cosa si intende per segmento. In ciò che segue useremo la notazione  $S_n$ , intendendo sia il piano ( $n = 2$ ) che lo spazio ( $n = 3$ ) che anche un generale spazio euclideo  $n$ -dimensionale, qualsiasi cosa questo voglia dire.

**Definizione 7.1 (Segmenti).** Siano  $A$  e  $B$  due punti dello spazio  $S_n$ ,  $n = 2, 3$ .

- Se  $A \neq B$ , esiste un'unica retta  $r$  passante per  $A$  e  $B$ ; in tal caso i due punti dividono  $r$  in tre parti: una semiretta di origine  $A$ , una semiretta di origine  $B$ , ed una parte limitata di retta, che verrà detto *segmento di estremi  $A$  e  $B$* .
- Se, invece, i due punti coincidono allora la retta  $r$  non è più univocamente individuata; continueremo tuttavia a parlare del segmento di estremi  $A$  e  $B$  intendendo con ciò l'unico punto  $A = B$ , detto *segmento degenero, o nullo, di estremi  $A$  e  $B$* .

Il segmento di estremi  $A$  e  $B$  si denota con il simbolo  $\overline{AB}$ .

Possiamo adesso introdurre il concetto di vettore applicato, che ci permetterà poi di definire i sistemi di coordinate.

**Definizione 7.2 (Vettori applicati).** Sia  $O$  un punto fissato dello spazio euclideo  $S_n$ .

Un *vettore  $\vec{v}$  applicato in  $O$*  è un segmento, eventualmente degenero, avente un estremo in  $O$ , detto *estremo vincolato*, ed un altro estremo  $P$ , detto *estremo libero*.

- Il vettore applicato in  $O$  e di estremo libero  $P$  è indicato con il simbolo  $\overrightarrow{OP}$ ;
- se  $O = P$  e il segmento è degenero, scriviamo  $\vec{0}$  invece di  $\overrightarrow{OO}$ .
- L'insieme di tutti i vettori di  $S_n$  applicati in  $O$  è indicato con il simbolo  $V_n(O)$ .

Le scritte  $\vec{v}$  o  $\overrightarrow{OP}$  ricordano che il segmento è “orientato”; in questo senso le due scritte  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{PO}$ , pur rappresentando lo stesso segmento, rappresentano vettori applicati diversi.

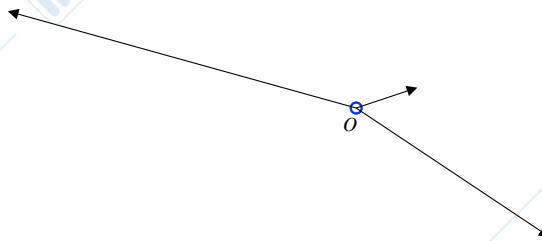


Figura 7.1

Ad ogni vettore geometrico sono associati alcuni dati importanti.

**Definizione 7.3 (Direzione, verso, modulo di un vettore).** Sia  $\overrightarrow{OP} \in V_n(O)$ .

- Se  $\overrightarrow{OP} \neq \vec{0}$ , definiamo *direzione di  $\overrightarrow{OP}$*  la retta passante per i punti  $O$  e  $P$ ; la direzione del vettore nullo  $\vec{0}$  è indeterminata.
- Se  $\overrightarrow{OP} \neq \vec{0}$ , definiamo *verso di  $\overrightarrow{OP}$*  la semiretta di origine  $O$  e contenente il punto  $P$ ; il verso del vettore nullo  $\vec{0}$  è indeterminato.
- Fissata un'unità di misura  $u$  in  $S_n$ , definiamo *modulo di  $\overrightarrow{OP}$*  la lunghezza di  $\overrightarrow{OP}$  rispetto all'unità di misura  $u$ . Il modulo (o la lunghezza) del vettore  $\overrightarrow{OP}$  si indica con  $|\overrightarrow{OP}|$ . I vettori di  $V_n(O)$  di modulo 1 vengono detti *versori*.

Osserviamo che  $|\vec{v}| \geq 0$  e risulta  $|\vec{v}| = 0$  se e solo se  $\vec{v} = \vec{0}$ .

⚠ Con la convenzione su direzione e verso del vettore nullo, è chiaro che ogni vettore applicato rimane completamente individuato da direzione, verso e modulo. Si noti perciò che due vettori non nulli coincidono se e solo se hanno stessa direzione, stesso verso e stessa lunghezza.

**Definizione 7.4 (Vettori paralleli, concordi, discordi, complanari).**

- Siano  $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \in V_n(O)$ . Il vettore  $\overrightarrow{OP}$  è *parallelo* a  $\overrightarrow{OQ}$ , e scriviamo  $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OQ}$ , se i punti  $O, P$  e  $Q$  sono allineati.
- Se  $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OQ}$  sono non nulli, diciamo che i due vettori sono *concordi* se hanno lo stesso verso, *discordi* se hanno versi distinti.
- Siano  $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR} \in V_n(O)$ . I tre vettori  $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$  e  $\overrightarrow{OR}$  sono *complanari* se lo sono i quattro punti  $O, P, Q$  e  $R$ .

Osserviamo che se  $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \in V_n(O)$  sono non nulli essi sono paralleli se e solo se hanno la stessa direzione. Tuttavia la Definizione 7.4 si estende anche al caso in cui uno dei due sia nullo: ad esempio se  $\overrightarrow{OP} = \vec{0}$ , ciò significa che  $P = O$ , dunque i tre

punti  $O$ ,  $P$  e  $Q$  risultano ovviamente essere allineati. Quindi, in base alla definizione sopra, il vettore nullo  $\vec{0}$  è parallelo ad ogni vettore in  $V_n(O)$ . Un discorso analogo può essere fatto per la nozione di complanarità.

Si noti inoltre che ogni vettore non nullo  $\vec{v} \in V_n(O)$  ha esattamente due versori a esso paralleli, uno concorde e uno discorde.

## 7.2 Sistemi di coordinate nel piano

Possiamo ora introdurre la nozione di sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano  $S_2$  e nello spazio  $S_3$ . A tale scopo fissiamo una volta per tutte un'unità di misura  $u$  in  $S_n$ ,  $n = 2, 3$ . Cominciamo dal caso del piano.

**Definizione 7.5 (Sistemi di riferimento nel piano).** Un sistema di riferimento (cartesiano ortogonale)  $O\vec{i}\vec{j}$  in  $S_2$  è definito dai seguenti enti:

- (SRP1) un punto  $O \in S_2$  detto *origine* del sistema di riferimento;
- (SRP2) un versore  $\vec{i}$  applicato in  $O$ ;
- (SRP3) un versore  $\vec{j}$  applicato in  $O$  tale che il versore  $\vec{i}$  si sovrappone al versore  $\vec{j}$  con una rotazione di  $\pi/2$  radianti intorno ad  $O$  in senso antiorario.

Nella Figura 7.2 è riportato un esempio di sistema di riferimento nel senso della Definizione 7.5.

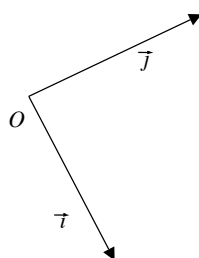


Figura 7.2

Le direzioni dei versori  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  vengono dette rispettivamente *asse delle ascisse* (o delle  $x$ ) e *asse delle ordinate* (o delle  $y$ ). I versi di  $\vec{i}$  e di  $\vec{j}$  vengono detti rispettivamente *semiasse positivo delle ascisse* e *semiasse positivo delle ordinate*; similmente i versi opposti a quelli di  $\vec{i}$  e di  $\vec{j}$  vengono detti rispettivamente *semiasse negativo delle ascisse* e *semiasse negativo delle ordinate*.

Si noti che un sistema di riferimento può anche essere descritto partendo dagli assi e fissando poi i versori: per questo motivo spesso parleremo di sistema di riferimento  $Oxy$  anche se, in questo caso, la notazione è ambigua in quanto non fa riferimento all'unità di misura  $u$ .

Procediamo adesso a stabilire, grazie ad un sistema di riferimento fissato, una biiezione fra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali. Sia  $P \in S_2$  un qualsiasi punto del piano (eventualmente appartenente agli assi) e si considerino le rette  $r_x$  ed  $r_y$  passanti per  $P$  e parallele rispettivamente all'asse delle ascisse ed all'asse delle ordinate: allora la retta  $r_x$  intersecherà l'asse delle ordinate in un punto corrispondente al numero reale  $y_P$  (detto *ordinata di P*), mentre la retta  $r_y$  intersecherà l'asse delle ascisse in un punto corrispondente al numero  $x_P$  (detto *ascissa di P*). Al punto  $P$  resta associata la coppia ordinata  $(x_P, y_P)$ .

In tale corrispondenza il punto di coordinate  $(0, 0)$  è l'origine  $O$ , i punti di ascissa nulla sono i punti dell'asse delle  $y$ , i punti di ordinata nulla sono i punti dell'asse delle  $x$  e i punti con coordinate entrambe diverse da zero sono i punti non appartenenti agli assi coordinati.

Nella Figura 7.3 riportiamo gli assi delle ascisse e delle ordinate e le coordinate di un punto  $P$  nel sistema di riferimento introdotto nella Figura 7.2. Sono anche riportati i punti  $U_x$  ed  $U_y$  estremi liberi dei vettori  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  rispettivamente.

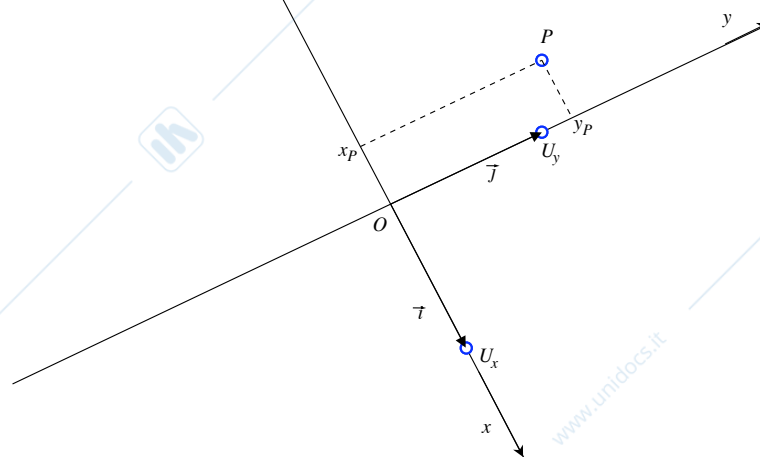


Figura 7.3

⚠ Si noti che la coppia di coordinate dipende dalla scelta del sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}$  e dalla scelta dell'unità di misura  $u$ . Uno stesso punto  $P$  può corrispondere a coppie numeriche molto diverse in sistemi di riferimento differenti!

Con abuso di notazione, noi spesso scriveremo  $P = (x_P, y_P)$ : questa non è un'uguaglianza nel senso usuale (non può esserlo perché l'oggetto a sinistra dell'uguale è un punto del piano e l'oggetto a destra è un elemento del prodotto cartesiano  $\mathbb{R}^2$ ), ma va letta come *il punto  $P \in S_2$  che rispetto al sistema di riferimento fissato  $O\vec{i}\vec{j}$  ha ascissa  $x_P$  e ordinata  $y_P$ .*

**Osservazione 7.6.** Avere un sistema di coordinate nel piano permette di fare alcuni conti velocemente. Per esempio è possibile calcolare la lunghezza  $|\overline{AB}|$  del segmento

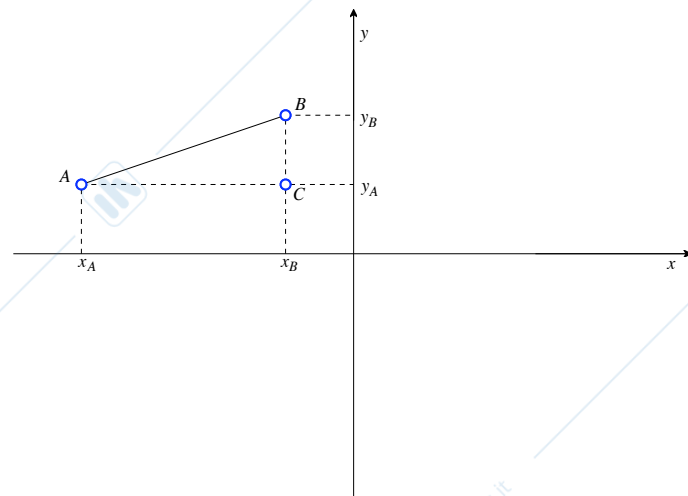


Figura 7.4

$\overline{AB}$  di estremi  $A$  e  $B$  in termini di tali coordinate. Infatti siano  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ , come nella Figura 7.4.

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo  $\Delta_{ABC}$ , che è rettangolo in  $C$ , si deduce la seguente formula per la lunghezza di un segmento (e quindi per il modulo di un vettore)

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

### 7.3 Sistemi di coordinate nello spazio

Procediamo il nostro studio con il caso dello spazio  $S_3$ .

**Definizione 7.7 (Sistemi di riferimento nello spazio  $S_3$ ).** Un sistema di riferimento (cartesiano ortogonale)  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  in  $S_3$  è definito dai seguenti enti:

- (SRS1) un punto  $O \in S_3$  detto *origine* del sistema di riferimento;
- (SRS2) due versori  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  applicati in  $O$  e fra loro perpendicolari;
- (SRS3) un versore  $\vec{k}$  applicato in  $O$ , perpendicolare al piano contenente  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  e tale che la terna  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sia orientata come l'indice, il medio e il pollice della mano destra (regola della mano destra).

Per i sistemi di riferimento nello spazio valgono le stesse considerazioni che abbiamo fatto nel caso precedente. Le direzioni di  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  vengono dette *asse delle ascisse* (o delle  $x$ ), *asse delle ordinate* (o delle  $y$ ) e *asse delle quote* (o delle  $z$ ) rispettivamente.

In particolare è possibile stabilire una biiezione fra i punti dello spazio e le terne ordinate di numeri reali. Sia infatti  $P \in S_3$  un qualsiasi punto del piano (eventualmente appartenente agli assi) e si considerino i piani  $\pi_x$ ,  $\pi_y$  e  $\pi_z$  passanti per  $P$  e

paralleli rispettivamente al piano  $yz$  (contenente gli assi delle ordinate e delle quote),  $xz$  (contenente gli assi delle ascisse e delle quote) e  $xy$  (contenente gli assi delle ascisse e delle ordinate): allora i piani  $\pi_x$ ,  $\pi_y$  e  $\pi_z$  intersecheranno gli assi in punti corrispondenti a numeri reali  $x_P$ ,  $y_P$  e  $z_P$  (detti rispettivamente *ascissa*, *ordinata* e *quota* di  $P$ ). Al punto  $P$  rimane associata la terna ordinata  $(x_P, y_P, z_P)$ .

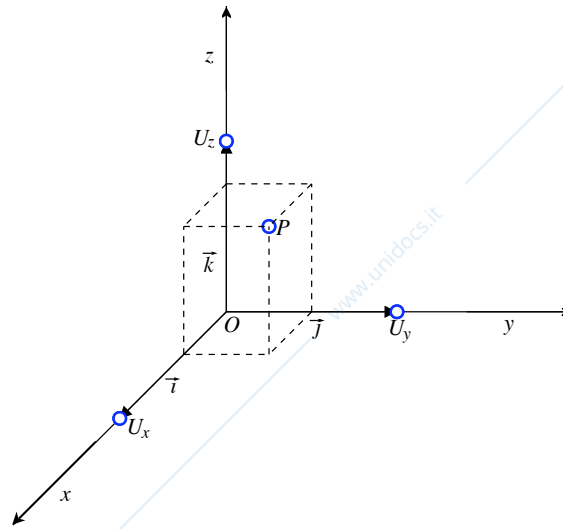


Figura 7.5

Nella Figura 7.5 riportiamo gli assi delle ascisse, delle ordinate e delle quote e le coordinate di un punto  $P$  in un sistema di riferimento in  $S_3$ . Sono anche riportati i punti  $U_x$ ,  $U_y$  e  $U_z$  estremi liberi dei vettori  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  rispettivamente.

Il motivo per cui viene adottata la convenzione della regola della mano destra è che se immaginiamo un osservatore che si trova nel semiasse positivo delle quote e guarda in basso, verso il piano delle ascisse e ordinate, la convenzione scelta fa sì che egli veda un piano con un sistema di coordinate come definito nel paragrafo precedente.

**Osservazione 7.8.** Come visto per segmenti nel piano, dato un segmento  $\overline{AB} \subseteq S_3$ , se  $A = (x_A, y_A, z_A)$ ,  $B = (x_B, y_B, z_B)$ , possiamo calcolare la sua lunghezza grazie al Teorema di Pitagora, ottenendo

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}. \quad (7.3.1)$$

## 7.4 Prime operazioni sui vettori applicati

D'ora innanzi ci limiteremo a considerare lo spazio ordinario  $S_3$  e vettori applicati in esso,  $V_3(O)$ . I risultati e le definizioni corrispondenti per vettori nel piano ordinario

$S_2$  (e quindi in  $V_2(O)$ ) sono del tutto analoghi. Per questioni di semplicità i disegni saranno quasi sempre fatti nel piano.

In  $S_3$  fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ ; è chiaro che ogni vettore  $\vec{OP}$  rimane completamente individuato dal suo estremo libero e quindi da una terna di coordinate  $(x_P, y_P, z_P)$ . Spesso identificheremo il vettore  $\vec{OP}$  con la matrice colonna

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}.$$

Si faccia attenzione a non confondere la terna di coordinate di un punto  $P$  con la matrice colonna associata al vettore applicato  $\vec{OP}$ .

Vogliamo ora introdurre due operazioni fra vettori applicati di uno stesso ambiente (del piano o dello spazio): la somma di vettori applicati e il prodotto di un vettore applicato per uno scalare. Iniziamo con la prima.

**Definizione 7.9 (Somma di vettori).** Siano  $\vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$  due vettori, corrispondenti alle matrici

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

rispettivamente.

Definiamo *somma di  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$*  il vettore  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$  corrispondente alla matrice

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix}.$$

La Definizione 7.9 sembra dipendere dal sistema di riferimento scelto  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  ma in realtà, ciò è solo apparente. Consideriamo infatti due vettori non nulli qualsiasi  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ : se tali vettori sono generali non saranno paralleli e si avrà una situazione come quella rappresentata nella Figura 7.6.

Si noti che i triangoli  $Ov_xA$  e  $BFC$  sono rettangoli in  $v_x$  e  $F$  rispettivamente, hanno i cateti orizzontali  $\overline{Ov_x}$  e  $\overline{BF}$  di lunghezze  $|v_x|$  e  $|(v_x + w_x) - w_x|$  ed i cateti verticali  $\overline{v_xA}$  e  $\overline{FC}$  di lunghezze  $|v_y|$  e  $|(v_y + w_y) - w_y|$ . Concludiamo che  $|\overline{Ov_x}| = |\overline{BF}|$  e  $|\overline{v_xA}| = |\overline{FC}|$ , quindi i triangoli  $Ov_xA$  e  $BFC$  sono congruenti: da ciò deduciamo che i loro angoli interni in  $O$  e  $B$  sono uguali, perciò i segmenti  $\overline{OA}$  e  $\overline{BC}$  sono paralleli. Ragionando in maniera simile sui triangoli  $CEA$  e  $Bw_yO$  deduciamo similmente che anche i segmenti  $\overline{AC}$  ed  $\overline{OB}$  sono paralleli. Concludiamo che il quadrilatero  $OACB$  è un parallelogramma.

Abbiamo quindi una via geometrica per calcolare la somma di due vettori applicati in  $O$ , detta *regola del parallelogramma*: se si considera il parallelogramma avente i due lati con vertice  $O$  coincidenti con i vettori applicati  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , il vettore  $\vec{v} + \vec{w}$  viene a coincidere con la diagonale uscente da  $O$ . Di conseguenza la definizione non dipende dal sistema di riferimento scelto.

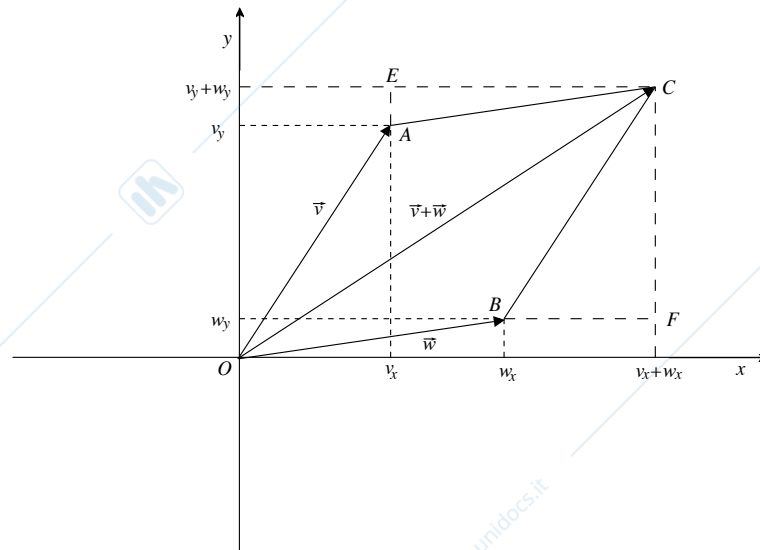


Figura 7.6

Si verifica facilmente che tale osservazione può essere estesa anche al caso di coppie di vettori non generali (per esempio, vettori paralleli o tali che uno dei due sia nullo), quindi la nostra definizione di somma non dipende, in realtà, dal sistema di riferimento scelto ma solo dai vettori.

Introduciamo adesso una seconda operazione sui vettori applicati.

**Definizione 7.10 (Prodotto per uno scalare).** Siano  $\alpha \in \mathbb{R}$  uno scalare e  $\vec{v} \in V_3(O)$  un vettore corrispondente alla matrice

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}.$$

Definiamo *prodotto del vettore  $\vec{v}$  per lo scalare  $\alpha$*  il vettore  $\vec{u} = \alpha\vec{v}$  corrispondente alla matrice

$$\alpha \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_x \\ \alpha v_y \\ \alpha v_z \end{pmatrix}.$$

Notiamo che anche la Definizione 7.10 sembra dipendere dal sistema di riferimento scelto, ma di nuovo tale dipendenza è solo apparente. Consideriamo infatti uno scalare  $\alpha$  non nullo, per esempio  $\alpha > 1$ , ed un vettore non nullo qualsiasi  $\vec{v}$ : si avrà una situazione come quella rappresentata nella Figura 7.7.

I triangoli  $Ov_x A$  e  $O\alpha v_x B$  sono rettangoli ed hanno i cateti orizzontali  $\overline{Ov_x}$  e  $\overline{O\alpha v_x}$  di lunghezze  $|v_x|$  e  $|\alpha v_x|$  ed i cateti verticali  $\overline{v_x A}$  e  $\overline{\alpha v_x B}$  di lunghezze  $|v_y|$  e  $|\alpha v_y|$ . Concludiamo che i triangoli  $Ov_x A$  e  $O\alpha v_x B$  sono simili. In particolare hanno gli angoli corrispondenti uguali, quindi le loro ipotenuse sono parallele. Inoltre, i segmenti  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  hanno lunghezze proporzionali secondo il fattore  $\alpha$ .

Poiché abbiamo dato una descrizione geometrica di  $\alpha\vec{v}$ , la nostra definizione di prodotto non dipende dal sistema di riferimento scelto ma solo dal vettore e dallo scalare. Precisamente se o  $\vec{v} = \vec{0}$  oppure  $\alpha = 0$  allora  $\alpha\vec{v} = \vec{0}$ ; se invece  $\vec{v} \neq \vec{0}$  ed  $\alpha \neq 0$  la direzione di  $\alpha\vec{v}$  coincide con la direzione di  $\vec{v}$ ,  $\alpha\vec{v}$  è concorde con  $\vec{v}$  se  $\alpha > 0$  e discorde se  $\alpha < 0$  e  $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$ .

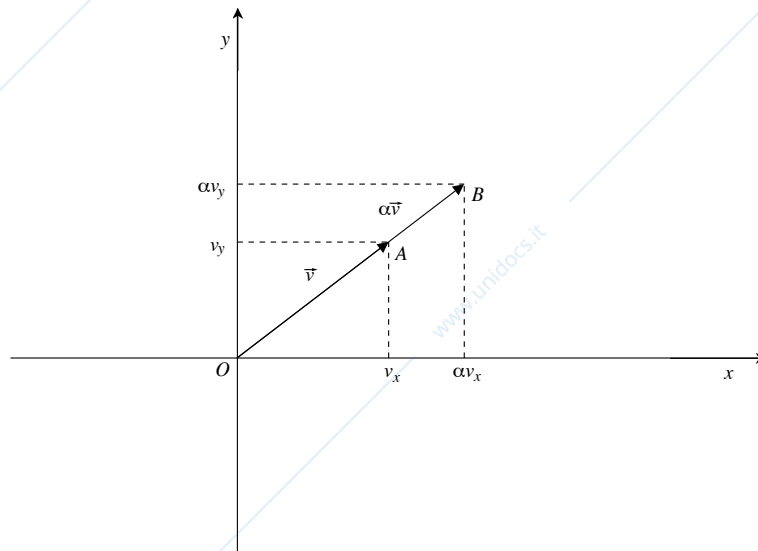


Figura 7.7

Da quanto visto sopra e dalle Proposizioni 1.20 e 1.23 che valgono per le matrici, ricaviamo la seguente lista di proprietà per le operazioni definite sopra, che valgono sia nel piano  $V_2(O)$  che nello spazio  $V_3(O)$ .

**Proposizione 7.11 (Proprietà di somma di vettori e prodotto per scalare).**

Sia  $n = 2, 3$ . In  $V_n(O)$  valgono le seguenti proprietà:

- (SVG1) per ogni  $\vec{v}, \vec{w} \in V_n(O)$ , si ha  $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$  (proprietà commutativa);
- (SVG2) per ogni  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_n(O)$ , si ha  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$  (proprietà associativa);
- (SVG3) il vettore nullo è l'unico elemento neutro per la somma, cioè è l'unico vettore tale che  $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$ , per ogni  $\vec{v} \in V_n(O)$  (esistenza e unicità dell'elemento neutro);
- (SVG4) per ogni  $\vec{v} \in V_n(O)$ ,  $-\vec{v}$  è l'unico elemento opposto di  $\vec{v}$ , cioè è l'unico vettore tale che  $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$  (esistenza e unicità dell'elemento opposto);
- (PVG1) per ogni  $\vec{v} \in V_n(O)$ , si ha  $1\vec{v} = \vec{v}$  (esistenza dell'elemento neutro);
- (PVG2) per ogni  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  e  $\vec{v} \in V_n(O)$ , si ha  $\alpha_1(\alpha_2\vec{v}) = (\alpha_1\alpha_2)\vec{v}$  (proprietà associativa);
- (SPVG1) per ogni  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  e  $\vec{v} \in V_n(O)$ , si ha  $(\alpha_1 + \alpha_2)\vec{v} = \alpha_1\vec{v} + \alpha_2\vec{v}$  (proprietà distributiva rispetto alla somma di scalari);

(SPVG2) per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\vec{v}, \vec{w} \in V_n(O)$ , si ha  $\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$  (proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori).

Si noti che se  $\vec{v} \in V_3(O)$  corrisponde, rispetto al sistema di riferimento fissato  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ , alla matrice  $(v_x \ v_y \ v_z)$ , in base alla definizione di somma e prodotto per scalari data sopra si ha la seguente proprietà, illustrata nella Figura 7.8.

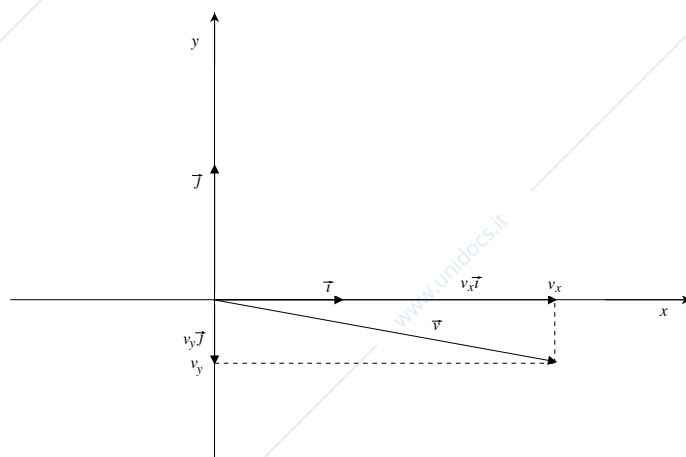


Figura 7.8

**Proposizione 7.12.** Dato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  in  $S_3$ , per ogni vettore  $\vec{v} \in V_3(O)$  esistono unici  $v_x, v_y, v_z \in \mathbb{R}$  tali che

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}. \quad (7.4.1)$$

Nella scrittura (7.4.1) si seguono le usuali convenzioni algebriche, in particolare la decomposizione di un vettore geometrico secondo i tre versori ci permette di lavorare con i vettori trattandoli come dei polinomi lineari in  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , e si ha

$$(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) + (w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}) = (v_x + w_x) \vec{i} + (v_y + w_y) \vec{j} + (v_z + w_z) \vec{k},$$

$$\alpha(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) = (\alpha v_x) \vec{i} + (\alpha v_y) \vec{j} + (\alpha v_z) \vec{k}.$$

**Esempio 7.13.** Fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  in  $S_3$ , si considerino i due vettori  $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  e  $\vec{w} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  di  $V_3(O)$ . Allora

$$\vec{v} + \vec{w} = (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) + (-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = (1 - 2)\vec{i} + (3 - 1)\vec{j} + (-1 + 1)\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j}.$$

Osserviamo che il vettore  $\vec{v} + \vec{w}$  si trova nel piano  $xy$ , dunque è perpendicolare a  $\vec{k}$ . Calcoliamo anche

$$\begin{aligned} \vec{v} - 2\vec{w} &= (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) - 2(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \\ &= (1 + 4)\vec{i} + (3 + 2)\vec{j} + (-1 - 2)\vec{k} = 5\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}. \end{aligned} \spadesuit$$

Ricordando quanto detto, per le matrici risulta  $-\vec{v} = (-1)\vec{v}$ . Ne segue una nozione di differenza di vettori applicati: se  $\vec{v}$  e  $\vec{w} \in V_3(O)$ , scriveremo  $\vec{v} - \vec{w}$  in luogo di  $\vec{v} + (-\vec{w})$ . Anche per la differenza  $\vec{v} - \vec{w}$  c'è un'interpretazione geometrica; si ricordi che  $\vec{v} + \vec{w}$  è la diagonale uscente da  $O$  del parallelogramma avente lati  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Allora la differenza  $\vec{v} - \vec{w}$  è la diagonale uscente da  $O$  del parallelogramma avente lati  $\vec{v}$  e  $-\vec{w}$ , come mostrato in Figura 7.9.

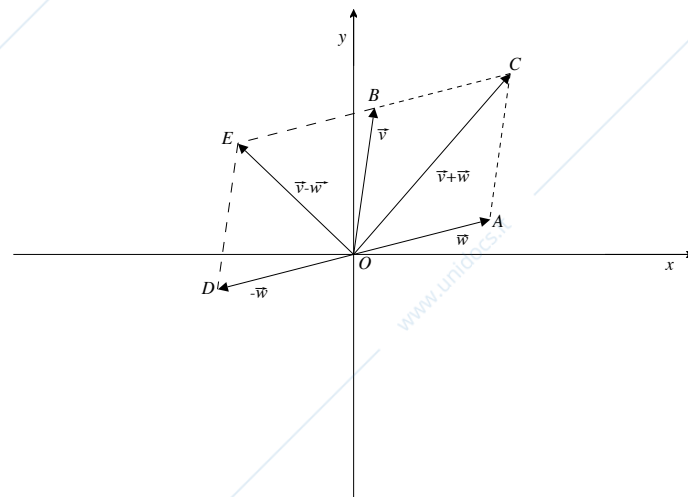


Figura 7.9

Poiché i parallelogrammi  $OACB$  e  $OBED$  sono congruenti, segue che  $\vec{v} - \vec{w} = \vec{OB} - \vec{OA}$  e, come segmento, è parallelo e congruente alla diagonale  $\overline{AB}$  orientata da  $A$  a  $B$ .

Nel seguito scriveremo  $B - A$  in luogo di  $\vec{OB} - \vec{OA}$ : si noti che non stiamo facendo una differenza di punti (che non ha senso), ma stiamo semplicemente definendo un nuovo simbolo per indicare un particolare vettore di  $V_3(O)$ .

Il simbolo  $B - A$  è utile per ricordare che se  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$  allora

$$B - A = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}.$$

## 7.5 Caratterizzazione dei vettori paralleli e complanari

Concludiamo questa lezione chiarendo il rapporto fra le operazioni di somma di vettori e prodotto di un vettore per uno scalare e le nozioni di parallelismo e complanarità di vettori.

Un'interessante interpretazione algebrica della nozione geometrica di parallelismo è data dal seguente risultato.

**Proposizione 7.14.** *Siano  $\vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$  due vettori, con  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Allora  $\vec{v} \parallel \vec{w}$  se e solo se esiste  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale che  $\vec{w} = \alpha\vec{v}$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $\vec{w} = \alpha\vec{v}$ : se  $\vec{w} = \vec{0}$  allora per definizione  $\vec{w} \parallel \vec{v}$ . Se  $\vec{w} \neq \vec{0}$ , dall'interpretazione geometrica del prodotto per scalari, segue subito che  $\vec{w} \parallel \vec{v}$ .

Viceversa, supponiamo che  $\vec{w} \parallel \vec{v}$ . Se  $\vec{w} = \vec{0}$  allora  $\vec{w} = 0\vec{v}$ . Sia  $\vec{w} \neq \vec{0}$ : se  $\vec{v}, \vec{w}$  sono concordi definiamo  $\alpha = |\vec{w}|/|\vec{v}|$ , se sono discordi  $\alpha = -|\vec{w}|/|\vec{v}|$ . Allora  $\alpha\vec{v}$  è un vettore avente stessa direzione di  $\vec{v}$  (e di  $\vec{w}$ ), verso coincidente con quello di  $\vec{v}$  se  $\vec{v}, \vec{w}$  sono concordi, opposto se  $\vec{v}, \vec{w}$  sono discordi (quindi ha verso coincidente con quello di  $\vec{w}$ ) e modulo pari a  $|\alpha| |\vec{v}| = (|\vec{w}|/|\vec{v}|)|\vec{v}| = |\vec{w}|$ . Concludiamo che  $\vec{w} = \alpha\vec{v}$ .  $\square$

Applichiamo tale proprietà al caso dei versori di un vettore non nullo  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Sia  $\text{vers}(\vec{v})$  il versore ad esso parallelo e concorde: allora si deve avere  $\text{vers}(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$  con  $\alpha > 0$ : calcolando i moduli si ottiene  $1 = |\text{vers}(\vec{v})| = \alpha|\vec{v}|$  da cui si deduce che  $\text{vers}(\vec{v}) = \vec{v}/|\vec{v}|$ . Ovviamente  $-\vec{v} = (-1)\text{vers}(\vec{v})$  è il versore ad esso parallelo e discorde.

**Proposizione 7.15.** *Siano  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$  tre vettori, con  $\vec{v} \parallel \vec{w}$ . Allora  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sono complanari se e solo se esistono  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tali che  $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo sia  $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ : in base all'interpretazione geometrica della somma abbiamo che  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  giacciono in uno stesso piano.

Viceversa supponiamo che  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  giacciono in uno stesso piano: supponiamo che  $P$  sia l'estremo libero di  $\vec{u}$ . Le rette per  $P$  parallele alle direzioni  $r$  ed  $s$  di  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  rispettivamente, intersecano  $s$  ed  $r$  rispettivamente in due punti  $S$  e  $R$  tali che il quadrilatero  $OSPR$  è un parallelogramma.

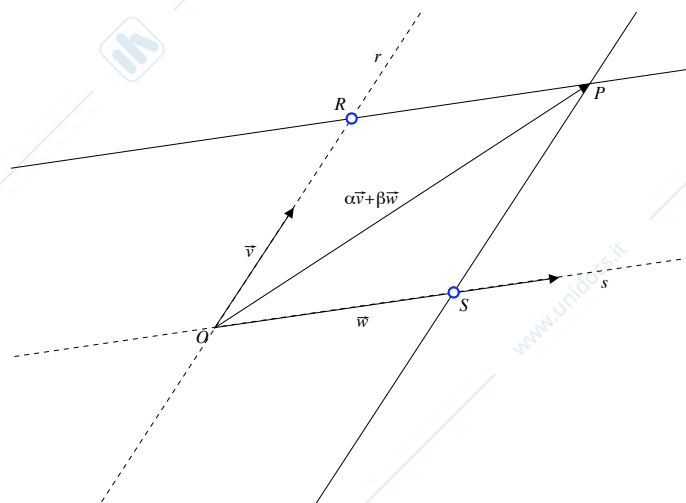


Figura 7.10

Per costruzione  $\vec{OS} \parallel \vec{w}$  e  $\vec{OR} \parallel \vec{v}$ , quindi esistono  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tali che  $\vec{OS} = \beta\vec{w}$  e  $\vec{OR} = \alpha\vec{v}$ : allora il significato geometrico di somma di vettori applicati ci permette di scrivere  $\vec{OP} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ .  $\square$

Dalle Proposizioni 7.14 e 7.15 segue il seguente risultato.

**Proposizione 7.16.** *In  $S_3$  sia fissato un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  e si considerino  $A, B, C, D$  quattro punti in  $S_3$ , di coordinate  $A = (x_A, y_A, z_A)$ ,  $B = (x_B, y_B, z_B)$ ,  $C = (x_C, y_C, z_C)$ ,  $D = (x_D, y_D, z_D)$ .*

i) I punti  $A, B$  e  $C$  sono allineati se e solo se

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{pmatrix} \leq 1;$$

ii) i punti  $A, B, C$  e  $D$  sono complanari se e solo se

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{pmatrix} \leq 2.$$

*Dimostrazione.*

i) Se  $A = B = C$  non c'è nulla da verificare: supponiamo perciò  $B - A \neq \vec{0}$ . I vettori  $B - A$  e  $C - A$  sono paralleli se e solo se i punti  $A, B, C$  sono allineati. Per la Proposizione 7.14 questo avviene se e solo se esiste  $t \in \mathbb{R}$  tale che

$$(x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} + (z_C - z_A)\vec{k} = t((x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}),$$

cioè se e solo se con l'operazione elementare  $R_2 \rightarrow R_2 - tR_1$  la matrice sopra si trasforma in

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cioè se e solo se ha rango al più 1.

ii) Se i punti  $A, B, C, D$  sono allineati non c'è nulla da verificare: supponiamo perciò  $B - A \nparallel C - A$ . I vettori  $B - A, C - A$  e  $D - A$  sono complanari se e solo se i punti  $A, B, C, D$  lo sono. Per la Proposizione 7.15 questo accade se e solo se esistono  $t, u \in \mathbb{R}$  tale che

$$\begin{aligned} (x_D - x_A)\vec{i} + (y_D - y_A)\vec{j} + (z_D - z_A)\vec{k} \\ = t((x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}) + u((x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} + (z_C - z_A)\vec{k}), \end{aligned}$$

cioè se e solo se con l'operazione elementare  $R_3 \rightarrow R_3 - tR_1 - uR_2$  la matrice sopra si trasforma in

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cioè se e solo se ha rango al più 2. □