

Quiz 3. Dati gli insiemi

$$A := \{ (a, b, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}, \quad B := \{ (a, 0, 0, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \},$$

dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

- a) $A \cap B = \emptyset$.
- b) $A \cap B$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2.
- c) $A + B$ contiene quattro elementi linearmente indipendenti.
- d) $A \subseteq B$.

Svolgimento. Osserviamo preliminarmente che A e B sono sottospazi.

L'affermazione a) è falsa. Infatti dalla teoria è noto che l'intersezione di due sottospazi è ancora un sottospazio, in particolare è non vuota. Nel caso particolare si verifica facilmente che $B \subseteq A$, dunque $A \cap B = B$.

L'affermazione b) è vera. Infatti segue dall'osservazione che $A \cap B$ che ha dimensione 2 poiché $B = \mathcal{L}(e_1, e_4)$.

L'affermazione c) è falsa. Infatti essendo $B \subseteq A$ segue che $A + B = A$, e si $A = \mathcal{L}(e_1, e_4, e)$ ove $e = (0, 1, 1, 0)$. Quindi $\dim(A + B) = \dim(A) = 3$.

L'affermazione d) è falsa. Chiaramente $e \in A \setminus B$.

Quiz 4. Sia

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) $\rho(A) = 2$ per ogni $h \neq 0$.
- b) A è invertibile per $h = 1/5$.
- c) Per ogni h le colonne di A sono una base di $\mathbb{R}^3$.
- d) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

Svolgimento. Operando sulle righe della matrice si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + hR_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3h & 1-2h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3hR_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-5h \end{pmatrix}.$$

L'affermazione a) è falsa. Infatti se $1 - 5h \neq 0$ risulta $\rho(A) = 3$.

L'affermazione b) è falsa. Infatti se $h = 1/5$ risulta $1 - 5h = 0$, dunque $\rho(A) = 2$ e, dalla teoria generale, è noto che una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo.

L'affermazione c) è falsa. Infatti se $h = 1/5$ (e solo in questo caso), risulta $1 - 5h = 0$, dunque $\rho(A) = 2$, mentre $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Per esclusione l'affermazione d) risulta essere vera.

Quiz 5. Siano

$$V := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0 \}, \quad W := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z \}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) $V \cap W = \emptyset$.
- b) $V \cup W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
- c) $V + W = \mathcal{L}((1, 1, 1))$.
- d) $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W)$