Lezione 1

1.1 Matrici a coefficienti in $\mathbb{R}$

Definizione 1.1. Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ numeri interi positivi.

Una *matrice* $m \times n$ *a coefficienti in* $\mathbb{R}$ è un insieme di mn numeri reali disposti su m righe ed n colonne circondata da parentesi tonde. Tali numeri sono detti *entrate*, *coefficienti*, o *componenti* della matrice. L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ si indica con $\mathbb{R}^{m,n}$.

Vi sono alcuni casi particolari che vale la pena evidenziare:

- la matrice $0_{m,n} \in \mathbb{R}^{m,n}$ avente tutte le entrate nulle viene detta *matrice nulla*;
- se $m = n$, cioè se il numero delle righe è uguale al numero delle colonne, la matrice è detta *matrice quadrata*;
- se $m = 1$ la matrice è detta *matrice riga*, mentre se $n = 1$ *matrice colonna*;
- se $m = n = 1$, cioè quando ci sono una sola riga e una sola colonna (e, quindi, anche una sola entrata), si preferisce identificare $\mathbb{R}^{1,1}$ con $\mathbb{R}$.

Esempio 1.2. Diamo alcuni esempi di matrici.

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi \\ -3/19 & \sqrt{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3/19 & 0 \\ \pi & \sqrt{21} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \text{(matrice quadrata)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1} \text{(matrice colonna)}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,2} \text{(matrice riga)}$$

Le matrici nulle 2×2 e 2×3 sono

$$0_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad 0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

♠

☠ La tabella

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & & 0 \\ & & 17 & \end{pmatrix}$$

non è una matrice.

⚠ Testi diversi utilizzano notazioni diverse per indicare una matrice! Ad esempio la matrice dell'Esempio 1.2 può essere scritta come

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi \\ -3/19 & \sqrt{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & \pi \\ -3/19 & \sqrt{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} 1 & \pi \\ -3/19 & \sqrt{21} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

La notazione

$$\begin{Bmatrix} 1 & \pi \\ -3/19 & \sqrt{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

è da evitare, perché può creare confusione con quella usata per gli insiemi.

Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ una matrice. Ad ogni sua entrata a rimangono associati due numeri interi positivi, gli indici i e j della riga e della colonna al cui incrocio si trova a: i e j vengono detti rispettivamente *indice di riga* e *indice di colonna* dell'entrata a e a si dice *entrata in posizione* (i, j).

Spesso, per indicare nelle formule l'entrata in posizione (i, j) si scrive $a_{i,j}$. Similmente la matrice A si può indicare con la notazione

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}.$$

Tale notazione significa che A è la matrice le cui entrate sono i numeri $a_{i,j}$ con gli indici i e j che variano da 1 a m e da 1 a n rispettivamente.

Se A è quadrata con $m = n$ si può scrivere anche

$$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Quando le dimensioni della matrice sono fissate, a volte conviene indicare le entrate con lettere distinte. Per esempio, una matrice 2×2 generica può essere indifferentemente indicata con

$$(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2 \\ 1 \leqslant j \leqslant 2}}, \qquad (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}, \qquad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Esempio 1.3. Si considerino le prime due matrici dell'Esempio 1.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ -3/19 & \sqrt{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3/19 & 0 \\ \pi & \sqrt{21} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}.$$

L'entrata $(1, 2)$ di A è $a_{1,2} = \pi$. Le entrate $(3, 1)$ e $(3, 2)$ di A sono $a_{3,1} = a_{3,2} = 0$. Invece le entrate $(3, 3)$ e $(2, 3)$ non esistono.

Analogamente, le entrate $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$ di B non esistono. Invece le entrate $(1, 2)$ e $(2, 3)$ di B sono $b_{1,2} = -3/19$ e $b_{2,3} = 0$. ♠

Definizione 1.4 (**Opposto di una matrice**). Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ una matrice.

L'*opposto* di A è la matrice di $\mathbb{R}^{m,n}$, indicata con $-A$, la cui entrata (i,j) coincide con l'opposto dell'entrata (i,j) della matrice A, per $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Se $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathbb{R}^{m,n}$ si scrive in simboli $-A = (-a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathbb{R}^{m,n}$.

Esempio 1.5. Per le matrici A e B degli Esempi 1.2 e 1.3, vale che

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -\pi \\ 3/19 & -\sqrt{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2} \qquad -B = \begin{pmatrix} -1 & 3/19 & 0 \\ -\pi & -\sqrt{21} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}. \qquad \spadesuit$$

Definizione 1.6 (**Uguaglianza tra matrici**). Due matrici

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathbb{R}^{m,n} \qquad \text{e} \qquad B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathbb{R}^{p,q}$$

si dicono *uguali* se valgono le seguenti proprietà:

(U1) A e B hanno lo stesso numero di righe e colonne, cioè se $m = p$ ed $n = q$;

(U2) le entrate di A e B aventi la stessa posizione nelle due matrici coincidono, cioè se $a_{i,j} = b_{i,j}$ per ogni $i = 1, \dots, m = p$ e $j = 1, \dots, n = q$.

Le due matrici A e B dell'Esempio 1.3 sono, perciò, diverse. Ciononostante, sono legate da un'ovvia relazione: l'entrata (i,j) di A coincide con l'entrata (j,i) di B.

Definizione 1.7 (**Matrice trasposta**). Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$.

La *trasposta* di A è la matrice di $\mathbb{R}^{n,m}$, indicata con ${}^tA$, la cui entrata (j,i) coincide con l'entrata (i,j) della matrice A per $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Se $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathbb{R}^{m,n}$ scriveremo in simboli ${}^tA = (a_{j,i})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant m}} \in \mathbb{R}^{n,m}$.

Esempio 1.8. Per le matrici A e B dell'Esempio 1.3 vale $B = {}^tA$ e $A = {}^tB$.

La trasposta di una matrice riga è una matrice colonna e viceversa:

$$C = \begin{pmatrix} \pi & 0 & -2 & 1/3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,4} \qquad \Rightarrow \qquad {}^tC = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ -2 \\ 1/3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,1}.$$

Può accadere che la trasposta di una matrice coincida con la matrice stessa, per esempio

$$D = \begin{pmatrix} 2 & e & -\pi \\ e & 0 & 5 \\ -\pi & 5 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \qquad \Rightarrow \qquad {}^tD = \begin{pmatrix} 2 & e & -\pi \\ e & 0 & 5 \\ -\pi & 5 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = D.$$

Nel prossimo paragrafo studieremo meglio questo caso. $\spadesuit$

⚠ Testi diversi utilizzano notazioni diverse per denotare la trasposta. Non solo ${}^tA$, ma anche A^t, ${}^\top A$, $A^\top$; più raramente si trova anche A_{-1}.

Proposizione 1.9 (Proprietà della trasposta). *Valgono le seguenti proprietà:*

(T1) *per ogni matrice A, si ha che $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ se e solo se ${}^tA \in \mathbb{R}^{n,m}$;*

(T2) *per ogni $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si ha che ${}^t({}^tA) = A$ (la trasposta è un'operazione involutiva);*

(T3) *per ogni $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si ha che ${}^t(-A) = -({}^tA)$ (la trasposta è compatibile con l'opposto).*

Dimostrazione. Dimostriamo separatamente le varie proprietà. Per le uguaglianze tra matrici usiamo la Definizione 1.6. Osserviamo innanzitutto che in tutte le uguaglianze da dimostrare le dimensioni delle matrici a destra e a sinistra dell'uguale coincidono, quindi dobbiamo solo controllare che anche le entrate al posto (i, j) coincidano.

(T1) È una conseguenza diretta della definizione: il numero di righe di A è uguale al numero di colonne di ${}^tA$ e similmente il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di ${}^tA$.

(T2) L'entrata in posizione (i, j) di ${}^t({}^tA)$ coincide per definizione con l'entrata in posizione (j, i) di ${}^tA$, che a sua volta coincide con l'entrata in posizione (i, j) di A. Le due matrici quindi coincidono.

(T3) L'entrata in posizione (i, j) di ${}^t(-A)$ coincide con l'entrata (j, i) di $-A$, quindi è $-a_{j,i}$. D'altra parte l'entrata (i, j) di $-({}^tA)$ coincide con l'opposto dell'entrata (i, j) di ${}^tA$, cioè $-a_{i,j}$. □

1.2 Matrici quadrate

In questo paragrafo descriveremo alcune classi notevoli di matrici quadrate.

Definizione 1.10 (Diagonale di una matrice quadrata). Sia $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice quadrata.

La *diagonale* di A è l'insieme ordinato delle entrate di posizione (i, i) di A.

Esempio 1.11. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -17 & 4 \\ \pi & 0 & 8 \\ 2 & -3/4 & -e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

La diagonale di A è la successione ordinata $(1, 0, -e)$ (e non $(1, -e)$ o $(-e, 1, 0)$ o altro). ♠

Definizione 1.12 (Matrici diagonali). Sia $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice quadrata.

A si dice *diagonale* se tutte le entrate al di fuori della diagonale sono nulle, cioè se $a_{i,j} = 0$ per ogni $i \neq j$.

Esempio 1.13. Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente diagonale e non diagonale. ♠

Osserviamo che una matrice diagonale può essere descritta indicando solo la sua diagonale: per esempio la matrice A dell'Esempio 1.13 si può indicare come $A = \operatorname{diag}(1, 0, -e)$.

Vi sono due casi particolari di matrici diagonali che vale la pena evidenziare:

- La matrice nulla $0_{n,n}$ è diagonale.
- La matrice diagonale $n \times n$ avente tutte le entrate diagonali uguali ad 1 è detta *matrice identità di ordine* n e si indica con I_n. In simboli, l'entrata in posizione (i, j) di I_n coincide con $\delta_{i,j}$, il cosiddetto *Delta di Kronecker*, cioè

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

Ad esempio, le matrici identità I_n, con $n \leqslant 4$, sono

$$I_1 = (1), \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definizione 1.14 (**Matrici triangolari**).

- Una matrice quadrata $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice *triangolare superiore* se tutte le entrate al di sotto della diagonale sono nulle, cioè se $a_{i,j} = 0$ quando $i > j$.
- Similmente A si dice *triangolare inferiore* se le sue entrate al di sopra della diagonale si annullano, ovvero se $a_{i,j} = 0$ quando $i < j$.
- A si dice *strettamente triangolare superiore* se è triangolare superiore e inoltre le sue entrate sulla diagonale si annullano, ovvero se $a_{i,j} = 0$ quando $i \geqslant j$.
- Infine, A si dice *strettamente triangolare inferiore* se è triangolare inferiore e inoltre le sue entrate sulla diagonale si annullano, ovvero se $a_{i,j} = 0$ quando $i \leqslant j$.

Osserviamo che ogni matrice strettamente triangolare superiore (inferiore) è anche triangolare superiore (inferiore), ma non vale il viceversa. Si noti anche che la matrice nulla $0_{n,n}$ è sia (strettamente) triangolare superiore che inferiore.

Esempio 1.15. Si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -17 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -e \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 2 & -3/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

A è triangolare superiore, ma non lo è strettamente, mentre B è strettamente triangolare inferiore. ♠

Definizione 1.16 (Matrici simmetriche e antisimmetriche).

- Una matrice quadrata $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice *simmetrica* se coincide con la sua trasposta, cioè se ${}^tA = A$ e quindi $a_{i,j} = a_{j,i}$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$.
- Una matrice quadrata $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice *antisimmetrica* se coincide con l'opposto della sua trasposta, cioè se ${}^tA = -A$ e quindi $a_{i,j} = -a_{j,i}$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$.

Esempio 1.17. In $\mathbb{R}^{3,3}$ si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -17 & 4 \\ -17 & 0 & 8 \\ 4 & 8 & -e \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -17 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ -17 & 8 & -e \end{pmatrix}.$$

A è simmetrica, mentre B non lo è perché $b_{1,2} = -17 \neq 4 = b_{2,1}$.

Consideriamo adesso

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -17 & 4 \\ 17 & 0 & 8 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -17 & 4 \\ 17 & 0 & 8 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

C è antisimmetrica, mentre D non lo è perché $d_{1,1} = 1 \neq 0$. ♠

Si noti che in una matrice simmetrica le entrate in posizione simmetrica al di fuori della diagonale sono uguali; in una matrice antisimmetrica invece le entrate al di fuori della diagonale sono opposte e le entrate diagonali sono necessariamente nulle, dal momento che devono soddisfare l'uguaglianza $a_{i,i} = -a_{i,i}$.

Ogni matrice diagonale, in particolare la matrice nulla $0_{n,n}$, è simmetrica. Invece non possono essere simmetriche le matrici triangolari superiori ed inferiori che non siano diagonali.

L'unica matrice diagonale, o triangolare (superiore ed inferiore), o simmetrica che sia anche antisimmetrica è la matrice nulla $0_{n,n}$.

1.3 Somma e prodotto per scalare

In questo paragrafo definiremo due importanti operazioni sulle matrici.

Definizione 1.18 (Somma di matrici). Siano $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ e $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ due matrici in $\mathbb{R}^{m,n}$.

Definiamo *somma di A e B* la matrice di $\mathbb{R}^{m,n}$, indicata con $A+B$, la cui entrata in posizione (i, j) è $a_{i,j} + b_{i,j}$.

⚠ La somma è definita solo per matrici aventi le stesse dimensioni!

Esempio 1.19. In $\mathbb{R}^{3,2}$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 3 \\ 5/2 & 2 \end{pmatrix}.$$ ♠

La somma di matrici è quindi un'operazione che associa a due matrici delle stesse dimensioni una terza matrice, ancora delle stesse dimensioni. Tale operazione soddisfa una serie di proprietà che ora elencheremo.

Proposizione 1.20 (Proprietà della somma di matrici). *Valgono le seguenti proprietà:*

(S1) *per ogni* $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$, *si ha* $A + B = B + A$ *(proprietà commutativa);*

(S2) *per ogni* $A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n}$, *si ha* $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(proprietà associativa);*

(S3) *la matrice nulla è l'unico elemento neutro per la somma, cioè è l'unica matrice tale che* $0_{m,n} + A = A + 0_{m,n} = A$ *per ogni* $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ *(esistenza e unicità dell'elemento neutro);*

(S4) *per ogni* $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $-A$ *è l'unico elemento opposto di* A, *cioè è l'unica matrice tale che* $A + (-A) = 0_{m,n}$ *(esistenza e unicità dell'opposto).*

Inoltre:

(ST) *per ogni* $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$, *si ha* ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ *(compatibilità con la trasposta).*

Dimostrazione. Per dimostrare le uguaglianze tra matrici usiamo la Definizione 1.6; come in precedenza, in tutte le uguaglianze da dimostrare le dimensioni delle matrici a destra e a sinistra dell'uguale coincidono, quindi dobbiamo solo controllare che anche le entrate al posto (i, j) coincidano.

(S1) Lelemento in posizione (i, j) di $A + B$ è $a_{i,j} + b_{i,j}$. La tesi segue dal fatto che l'elemento in posizione (i, j) di $B + A$ è $b_{i,j} + a_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ (la somma tra numeri è commutativa!).

(S2) L'elemento in posizione (i, j) di $A+(B+C)$ è $a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j})$ e si ha che $a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j}) + c_{i,j}$ (la somma tra numeri è associativa!), che è l'elemento in posizione (i, j) di $(A + B) + C$.

(S3) La verifica che $0_{m,n} + A = A + 0_{m,n} = A$ è immediata. Supponiamo quindi che esista un secondo elemento neutro, ovvero che esista una matrice $X \in \mathbb{R}^{m,n}$ tale che $X + A = A$ per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Questo significa che per ogni entrata (i, j) vale l'uguaglianza $x_{i,j} + a_{i,j} = a_{i,j}$ e quindi che $x_{i,j} = 0$ per ogni $I = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ e cioè $X = 0_{m,n}$.

(S4) Di nuovo, la verifica che $A + (-A) = 0_{m,n}$ è immediata. Supponiamo quindi che esista un secondo elemento opposto, ovvero che esista una matrice $Y \in \mathbb{R}^{m,n}$ tale che $A + Y = 0_{m,n}$. Questo significa che per ogni entrata (i, j) vale l'uguaglianza $a_{i,j} + y_{i,j} = 0$ e quindi che $y_{i,j} = -a_{i,j}$ per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ e cioè $Y = -A$.

(ST) Al posto (i, j) di ${}^t(A + B)$ troviamo l'elemento in posizione (j, i) di $A + B$, cioè $a_{j,i} + b_{j,i}$, che coincide con la somma dell'elemento in posizione (i, j) di ${}^tA$ più l'elemento in posizione (i, j) di ${}^tB$ e quindi con l'elemento in posizione (i, j) di ${}^tA + {}^tB$. □

Se $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$, si scrive $A - B$ invece di $A + (-B)$.

Passiamo ora a definire il prodotto di una matrice per un numero reale.

Definizione 1.21 (Prodotto per scalare). Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ un numero (detto anche *scalare*), $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathbb{R}^{m,n}$ una matrice.

Definiamo *prodotto dello scalare* α *per la matrice* A la matrice di $\mathbb{R}^{m,n}$, indicata con αA, la cui entrata in posizione (i, j) è $\alpha a_{i,j}$.

Esempio 1.22. Si ha

$$2\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 10 \\ 2 & -14 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \spadesuit$$

Il prodotto per scalare è, quindi, un'operazione che associa ad una coppia formata da uno scalare e una matrice $m \times n$ un'altra matrice che ha le stesse dimensioni $m \times n$. Anche tale operazione soddisfa una serie di proprietà.

Proposizione 1.23 (Proprietà del prodotto per scalare). *Valgono le seguenti proprietà:*

(P1) *per ogni $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, si ha $1A = A$ (esistenza dell'elemento neutro);*

(P2) *per ogni $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, si ha $\alpha_1(\alpha_2 A) = (\alpha_1\alpha_2)A$ (proprietà associativa);*

(SP1) *per ogni $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, si ha $(\alpha_1 + \alpha_2)A = \alpha_1 A + \alpha_2 A$ (proprietà distributiva rispetto alla somma di scalari);*

(SP2) *per ogni $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (proprietà distributiva rispetto alla somma di matrici).*

Inoltre:

(PT) *per ogni $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha ${}^t(\alpha A) = \alpha({}^tA)$ (compatibilità con la trasposta);*

(LP) *per ogni $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, risulta $\alpha A = 0_{m,n}$ se e solo se vale $\alpha = 0$ oppure $A = 0_{m,n}$ (legge di annullamento del prodotto per scalare).*

Dimostrazione. Per dimostrare le uguaglianze tra matrici usiamo la Definizione 1.6; come in precedenza, in tutte le uguaglianze da dimostrare le dimensioni delle matrici a destra e a sinistra dell'uguale coincidono, quindi dobbiamo solo controllare che le entrate al posto (i, j) coincidano. Come nella dimostrazione della Proposizione 1.20, molte proprietà del prodotto per scalare si basano su proprietà simili a quelle della somma e del prodotto tra numeri.

(P1) L'entrata (i, j) di $1A$ è $1a_{i,j} = a_{i,j}$.

(P2) Si ha che $\alpha_1(\alpha_2 a_{i,j}) = (\alpha_1\alpha_2)a_{i,j}$, che è l'elemento in posizione (i, j) della matrice a destra.

(SP1) L'entrata (i, j) di $(\alpha_1 + \alpha_2)A$ è $(\alpha_1 + \alpha_2)a_{i,j} = \alpha_1 a_{i,j} + \alpha_2 a_{i,j}$, che è l'elemento (i, j) di $\alpha_1 A + \alpha_2 A$.

(SP2) Si ha che $\alpha(a_{i,j} + b_{i,j}) = \alpha a_{i,j} + \alpha b_{i,j}$, da cui l'uguaglianza delle matrici.

(PT) L'elemento in posizione (i, j) di ${}^t(\alpha A)$ è $\alpha a_{j,i}$ e lo stesso vale per $\alpha({}^tA)$.

(LP) Se il prodotto $\alpha A = 0_{m,n}$ significa che tutte le entrate della matrice αA sono nulle, cioè che per ogni (i, j) il prodotto $\alpha a_{i,j} = 0$; per la legge di annullamento del prodotto tra numeri questo implica che o $\alpha = 0$, oppure $a_{i,j} = 0$ per ogni indice (i, j) e quindi A è necessariamente la matrice nulla. □

In generale possiamo dire che le operazioni di somma tra matrici e prodotto per scalare si comportano in modo non troppo diverso dalla somma e dal prodotto tra due numeri cui siamo abituati. Nella prossima lezione descriveremo una terza operazione, detta *prodotto tra matrici*, che invece non avrà tali caratteristiche.