

# Esami scritti di Analisi Matematica I 2017 - 2018

1	Esame del 31 gennaio 2018 - I° turno . . . . .	2
2	Esame del 31 gennaio 2018 - II° turno . . . . .	11
3	Esame del 13 febbraio 2018 . . . . .	16
4	Esame del 3 luglio 2018 . . . . .	22
5	Esame del 18 settembre 2018 . . . . .	27

## 1 Esame del 31 gennaio 2018 - I° turno

**Esercizio 1.** (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = e^3 - e^{4\sqrt{|x|} - x}.$$

- Determinare il dominio di  $f(x)$ , i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.
- Studiare la derivabilità di  $f(x)$  nel suo dominio e stabilire la natura degli eventuali punti di non derivabilità. Calcolare la funzione derivata  $f'(x)$ .
- Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.
- Tracciare qualitativamente il grafico di  $f(x)$ .
- Determinare il più grande intervallo del tipo  $(k, +\infty)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , sul quale la restrizione di  $f$  risulta essere invertibile. Determinare il dominio e studiare la monotonia della funzione inversa.

**Esercizio 2, versione A.** (5 punti)

- Enunciare un teorema del confronto per funzioni con limite finito
- Mostrare che se  $f(x)$  è una funzione tale che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  e  $M(x)$  è la funzione mantissa, allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)M(x) = 0$ .
- Calcolare, se esistono, i limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^{-x} + 1}{M(4^{-x}) + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^{-x} + 1}{M(4^{-x}) + 1}$$

dove  $M(x)$  è la funzione mantissa.

**Esercizio 2, versione B.** (5 punti)

- Enunciare un teorema del confronto per funzioni con limite  $+\infty$ .
- Mostrare che se  $f(x)$  è una funzione tale che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  e  $M(x)$  è la funzione mantissa, allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + M(x)) = +\infty$ .

© 2018 Politecnico di Torino

(c) Calcolare, se esistono, i limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 1}{M(2^x) + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 1}{M(2^x) + 1}$$

dove  $M(x)$  è la funzione mantissa.

---

## SVOLGIMENTO

### Esercizio 1.

a)  $\text{dom} f = \mathbb{R}$ . Poiché  $4\sqrt{|x|} - x = -x + o(x)$ , per  $x \rightarrow \pm\infty$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} f(x) &= e^3 + o(1), & \text{per } x \rightarrow +\infty, \\ f(x) &= -e^{-x+o(x)} + e^3, & \text{per } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= e^3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$

e quindi

- 1)  $f$  ha asintoto orizzontale destro di equazione  $y = e^3$ .
- 2)  $f$  non ha asintoto obliquo sinistro, perché  $f$  è un infinito di ordine superiore a 1 rispetto a  $x$ , per  $x \rightarrow -\infty$ .

Osserviamo adesso che

$$f(x) = 0 \iff e^{4\sqrt{|x|} - x} = e^3 \iff 4\sqrt{|x|} - x = 3 \iff 4\sqrt{|x|} = x + 3.$$

L'equazione ha soluzioni se e solo se  $x + 3 \geq 0$ . Elevando al quadrato otteniamo

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ 16|x| = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9 \end{cases}$$

da cui ricaviamo i due sistemi

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ x^2 + 22x + 9 = 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ x_{1,2} = -11 \pm 4\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 10x + 9 = 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x_{3,4} = 5 \pm 4 \implies x_3 = 1, x_4 = 9. \end{cases}$$

Osserviamo che  $-11 - 4\sqrt{7} < -3$ , e quindi non è una soluzione accettabile, mentre lo è la soluzione  $-11 + 4\sqrt{7}$ , poiché  $-3 < -11 + 4\sqrt{7} < 0$ .

Dunque  $f$  ha tre zeri:  $x_2 = -11 + 4\sqrt{7}$ ,  $x_3 = 1$  e  $x_4 = 9$ .

- b) Osserviamo che  $\sqrt{|x|}$  non è derivabile in  $x = 0$ ; perciò  $f$  è composizione di funzioni derivabili, e quindi è derivabile, per ogni  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dobbiamo verificare invece se  $f$  è derivabile in  $x = 0$ . Possiamo procedere in due modi diversi:

Metodo 1. Usando i limiti notevoli, vediamo che

$$f(x) = e^3 - 1 - 4\sqrt{|x|} + o(\sqrt{|x|}), \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Applicando adesso la definizione di derivata di una funzione in un punto otteniamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\sqrt{|x|} + o(\sqrt{|x|})}{x}$$

da cui segue

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$ .

Dunque  $f$  non è derivabile in  $x = 0$ , che risulta essere un punto di cuspide di  $f$ .

Metodo 2. Poiché  $f$  è continua in  $\mathbb{R}$  ed è derivabile se  $x \neq 0$ , possiamo calcolare la derivata fuori da  $x = 0$  ed applicare il teorema “del tappabuchi” per verificare se  $f$  è derivabile in  $x = 0$ .

Ricordando che  $\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sgn} x$ , per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , abbiamo che:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{4\sqrt{|x|-x}} \left[ \frac{4}{2\sqrt{|x|}} \operatorname{sgn} x - 1 \right] = -e^{4\sqrt{|x|-x}} \left[ \frac{2}{\sqrt{|x|}} \operatorname{sgn} x - 1 \right] = \\ &= \begin{cases} e^{4\sqrt{|x|-x}} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) & x > 0 \\ e^{4\sqrt{|x|-x}} \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{-x}} \right) & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{4\sqrt{x-x}} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{4\sqrt{-x-x}} \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{-x}} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Tramite il teorema “del tappabuchi” giungiamo così alla conclusione che  $f$  non è derivabile in  $x = 0$ , che risulta essere un punto di cuspide per  $f$ .

- c) Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di  $f$  determiniamo prima i suoi punti critici (cioè i suoi punti a derivata nulla) e poi il segno di  $f'$ .

Osserviamo che per  $f'(x) > 0$  per ogni  $x < 0$ , dato che  $\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) > 0$ .

Per le  $x > 0$  invece

$$f'(x) = 0 \iff 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \iff \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} = 0 \iff \sqrt{x} - 2 = 0 \iff x = 4.$$

Dunque  $x = 4$  è l'unico punto critico di  $f$ . Osserviamo che anche il punto di cuspidità  $x = 0$  è un possibile punto di estremo della funzione. Per studiare la natura dei due punti, studiamo il segno di  $f'$ . Vediamo che, per le  $x > 0$ :

$$f'(x) \geq 0 \iff 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 0 \iff x \geq 4.$$

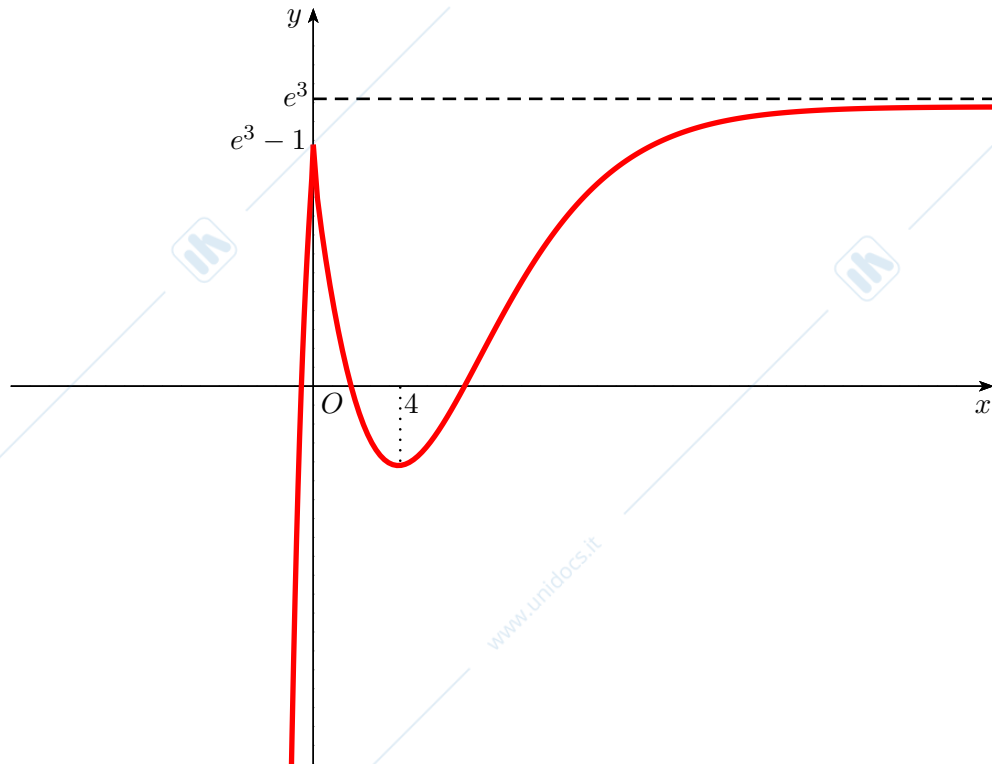
Ne segue che  $f'(x) > 0$  se  $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$  e  $f'(x) < 0$  se  $x \in (0, 4)$ . Il teorema di Lagrange ci permette di affermare che in ogni intervallo in cui il segno della derivata è costante la funzione è monotona; in particolare:

- $f$  è strettamente crescente su  $(-\infty, 0]$  e su  $[4, +\infty)$  (ma non necessariamente sull'unione dei due intervalli),
- $f$  è strettamente decrescente su  $[0, 4]$ .

Osserviamo che  $f(0) = e^3 - 1 < e^3$ . Dunque  $x = 0$  è un punto di massimo locale (o relativo), perché esistono  $x \in \text{dom } f$  tali che  $f(x) > f(0)$ , dato che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^3$ .

$x = 4$  è un punto di minimo locale (o relativo), perché la funzione è illimitata inferiormente. Vediamo anche che  $f(4) = e^3 - e^4 < 0$ .

- d) Un grafico qualitativo di  $f$  è



e) La restrizione di  $f$  ad una semiretta  $(k, +\infty)$ , cioè  $f|_{(k, +\infty)}$ , è invertibile se e solo se  $k \geq 4$ .  
Dunque il più grande intervallo  $(k, +\infty)$  su cui  $f$  è invertibile è  $(4, +\infty)$ .

$\text{dom } (f|_{(4, +\infty)})^{-1} = \text{im } (f|_{(4, +\infty)}) = (e^3 - e^4, e^3)$ . Poiché  $f|_{(4, +\infty)}$  è strettamente crescente sul suo dominio, anche la sua funzione inversa è strettamente crescente sul suo dominio.

**Esercizio 2, versione A.**

- a) Enunciamo entrambi i teoremi del confronto nel caso di limiti finiti. Lo studente poteva enunciare uno dei due a sua scelta.

**Primo teorema del confronto.** Siano  $f$  e  $g$  due funzioni definite su un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Sia  $x_0$  un punto di accumulazione di  $A$ . Supponiamo che

1. esista un intorno  $I$  di  $x_0$  tale che, per ogni  $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$ ,  $f(x) \leq g(x)$ ;
2. esistano  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$ .

Allora  $\ell \leq m$ .

**Secondo teorema del confronto, o dei due carabinieri.** Siano  $f$ ,  $g$  e  $h$  tre funzioni definite su un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Sia  $x_0$  un punto di accumulazione di  $A$ . Supponiamo che

1. esista un intorno  $I$  di  $x_0$  tale che, per ogni  $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$ ,  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ .

Allora esiste  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ .

- b) Ricordiamo che  $M(x) = x - [x]$  è una funzione periodica di periodo 1, tale che  $0 \leq M(x) < 1$ , per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Allora, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq |f(x)M(x)| < |f(x)|$ .

Poiché  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  se e solo se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0$ , per il Teorema dei due carabinieri sopra enunciato abbiamo che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)M(x)| = 0$ , da cui segue che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)M(x) = 0$ .

Lo stesso risultato si può dimostrare anche utilizzando la definizione di limite. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in \mathbb{R} \text{ tale che, se } x \in (a, +\infty) \cap \text{dom } f \implies |f(x)| < \varepsilon.$$

Dunque, per  $x \in (a, +\infty) \cap \text{dom } f$  abbiamo che

$$0 \leq |f(x)M(x)| < \varepsilon$$

e dunque, per la definizione di limite,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)M(x) = 0$ .

c) Osserviamo che  $1 \leq M(4^{-x}) + 1 < 2$ , e dunque  $\frac{1}{2} < \frac{1}{M(4^{-x}) + 1} \leq 1$ , per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .  
Dunque

$$\frac{1}{2}(4^{-x} + 1) < \frac{4^{-x} + 1}{M(4^{-x}) + 1} \leq 2(4^{-x} + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Poiché  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(4^{-x} + 1) = +\infty$ , per il Teorema del confronto nel caso di infiniti, abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^{-x} + 1}{M(4^{-x}) + 1} = +\infty.$$

Quando  $x \rightarrow +\infty$ , conviene utilizzare la sostituzione  $t = 4^{-x}$ , ricordando che  $\lim_{t \rightarrow 0^+} M(t) = 0$ .

Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^{-x} + 1}{M(4^{-x}) + 1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t + 1}{M(t) + 1} = 1.$$

### Esercizio 2, versione B.

a) **Teorema del confronto per limiti uguali a  $+\infty$ .** Siano  $f$  e  $g$  due funzioni definite su un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Sia  $x_0$  un punto di accumulazione di  $A$ . Supponiamo che

1. esista un intorno  $I$  di  $x_0$  tale che, per ogni  $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$ ,  $g(x) \geq f(x)$ ;

2. esista  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .

Allora esiste  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ .

b) Per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) + M(x) \geq f(x)$ .

Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , per il teorema enunciato in precedenza abbiamo che anche

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + M(x)) = +\infty.$$

Lo stesso risultato si può dimostrare anche utilizzando la definizione di limite. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ se}$$

$$\forall k \in \mathbb{R} \exists a \in \mathbb{R} \text{ tale che, se } x \in (a, +\infty) \cap \text{dom } f \implies f(x) > k.$$

Dunque, per  $x \in (a, +\infty) \cap \text{dom } f$  abbiamo che

$$f(x) + M(x) \geq f(x) > k.$$

Per definizione di limite,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + M(x)) = +\infty$ .

c) L'esercizio è del tutto analogo a quello della versione A. In questo caso, ponendo  $t = 2^x$ , abbiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 1}{M(2^x) + 1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t + 1}{M(t) + 1} = 1.$$

Procedendo per confronto come nella versione A otteniamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 1}{M(2^x) + 1} = +\infty.$$

## 2 Esame del 31 gennaio 2018 - II° turno

### Esercizio 1. (8 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - x - 2}}.$$

- Determinare il dominio di  $f(x)$ , i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.
- Studiare la derivabilità di  $f(x)$  nel suo dominio e calcolarne la derivata.
- Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.
- Tracciare qualitativamente il grafico di  $f(x)$ .
- Rappresentare nel piano l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^2(x^2 - x - 2) - x^2 = 0\}.$$

### Esercizio 2, versione A. (5 punti)

- Enunciare il Teorema della Media Integrale.
- Dato  $a > 0$  determinare  $M \in \mathbb{R}$  tale che  $\int_0^a e^{-x^2} dx \leq M$ .
- Mostrare che la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

ha asintoti orizzontali.

### Esercizio 2, versione B. (5 punti)

- Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.
- Dato  $a > 0$  determinare  $M \in \mathbb{R}$  tale che  $\int_0^a e^{x^2} dx \leq M$ .
- Mostrare che la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

non ha asintoti orizzontali.

## SVOLGIMENTO

### Esercizio 1.

a) La funzione è definita se  $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) > 0$ , cioè se  $x < -1$  o se  $x > 2$ : ne segue che  $\text{dom } f = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ .

Osserviamo che  $f(x) > 0$ , per ogni  $x \in \text{dom } f$ .

Inoltre

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 1 & \text{e} & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= +\infty & \text{e} & \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty. \end{aligned}$$

Ne segue che

- $f$  ha asintoto orizzontale bilaterale di equazione  $y = 1$ ,
- $f$  ha asintoti verticali di equazione  $x = -1$  e  $x = 2$ .

b) Osserviamo che  $f$  è composizione di funzioni derivabili in tutto il dominio. Dobbiamo quindi limitarci a calcolarne la derivata. Osserviamo che  $f(x) = \text{sgn } x \frac{x}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{sgn } x \frac{\sqrt{x^2 - x - 2} - x \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}}{x^2 - x - 2} = \text{sgn } x \frac{2(x^2 - x - 2) - x(2x - 1)}{2(x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - x - 2}} = \\ &= \begin{cases} \frac{x + 4}{2(x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - x - 2}} & \text{se } x < -1 \\ -\frac{x + 4}{2(x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - x - 2}} & \text{se } x > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

c) Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di  $f$  determiniamo prima i suoi punti critici (cioè i suoi punti a derivata nulla) e poi il segno di  $f'$ .

$f'(x) = 0$  se e solo se  $x = -4$ .

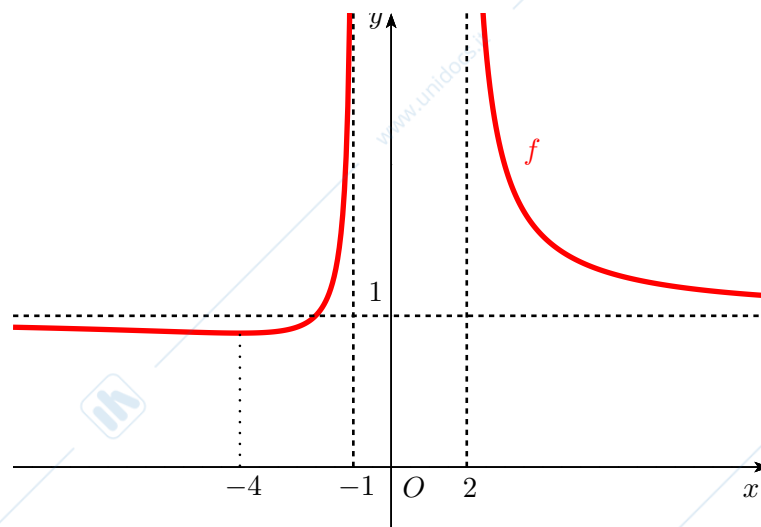
- Se  $x > 2$ ,  $f'(x) < 0$ .
- Se  $x < -1$ ,  $f'(x) > 0$  se e solo se  $-4 < x < -1$ .

Il teorema di Lagrange ci permette di affermare che in ogni intervallo in cui il segno della derivata è costante la funzione è monotona; in particolare:

- $f$  è strettamente crescente su  $[-4, -1)$ ,
- $f$  è strettamente decrescente su  $(-\infty, -4]$  e su  $(2, +\infty)$  (ma non necessariamente sull'unione dei due intervalli).

Ne segue che  $x = -4$  è l'unico punto di estremo locale della funzione ed è un punto di minimo assoluto per  $f$ . Per meglio disegnare il grafico, osserviamo che  $f(-4) = \frac{2\sqrt{2}}{3} < 1$ .

d) Un grafico qualitativo di  $f$  è



e) Dobbiamo disegnare l'insieme  $A$  dei punti del piano cartesiano che soddisfano l'equazione

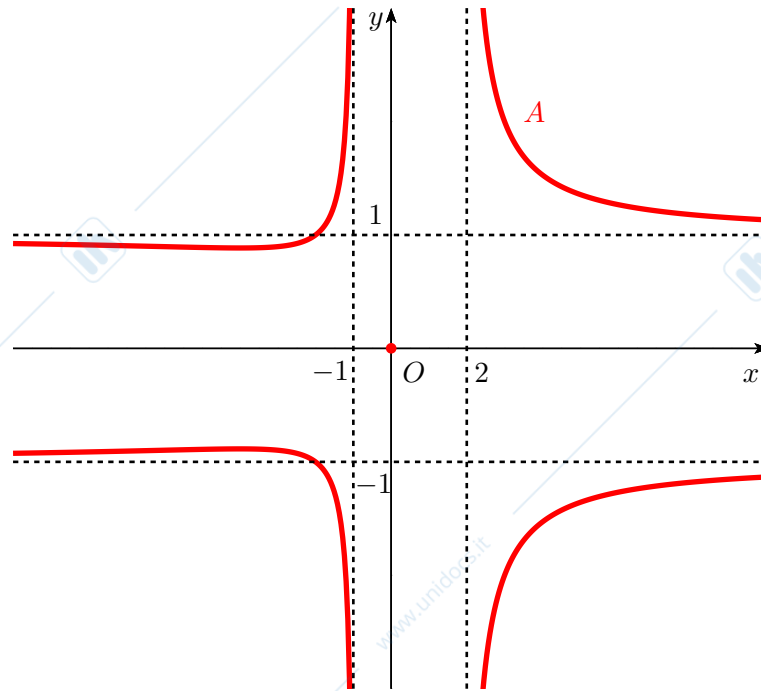
$$y^2(x^2 - x - 2) - x^2 = 0.$$

Prima di tutto vediamo che  $(0, 0) \in A$ . I punti  $x = -1$  e  $x = 2$  in cui si annulla  $x^2 - x - 2$  non appartengono ad  $A$ , per cui possiamo scrivere

$$y^2 = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \iff y = \pm \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - x - 2}}.$$

Dunque per disegnare l'insieme  $A$  è sufficiente disegnare il grafico della funzione  $f$ , il grafico della funzione  $-f$  (simmetrico del precedente rispetto all'asse  $x$ ) e l'origine.

© 2018 Politecnico di Torino



### Esercizio 2, Versione A.

- a) Data una funzione integrabile  $f$  su un intervallo chiuso  $[a, b]$ , si dice *media integrale* di  $f$  su  $[a, b]$  il numero reale  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

#### Teorema della Media Integrale

1. Sia  $f$  una funzione integrabile su un intervallo chiuso  $[a, b]$ ; siano

$$i = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ e } s = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

$$\text{Allora } i \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq s.$$

2. Sia  $f$  una funzione continua su un intervallo chiuso  $[a, b]$ .

$$\text{Allora esiste } c \in [a, b] \text{ tale che } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

- b) Poiché  $f(x) = e^{-x^2}$  è decrescente su  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) \leq f(0) = 1$  per ogni  $x \in [0, a]$ . Dunque, per la monotonia dell'integrale:

$$\int_0^a e^{-x^2} dx \leq \int_0^a 1 dx = a.$$

Affinché la disuguaglianza richiesta sia verificata possiamo scegliere  $M = a$ .

- c) La funzione integrale assegnata ha asintoti orizzontali se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ - \int_x^0 e^{-t^2} dt \right]$$

esistono finiti, uguali a  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$  rispettivamente. In questo caso  $F$  ha asintoto orizzontale destro di equazione  $y = \ell_1$  e asintoto orizzontale sinistro di equazione  $y = \ell_2$ .

Osserviamo che i due limiti esistono finiti se e soltanto se gli integrali impropri  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$  e  $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$  convergono. Poiché la funzione  $e^{-x^2} = o(x^2)$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ , per il criterio del confronto asintotico i due integrali impropri convergono e la funzione integrale assegnata ha asintoto orizzontale destro e sinistro.

### Esercizio 2, Versione B.

- a) **Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale**

Sia  $f$  una funzione continua su un intervallo aperto  $I$ . Dati  $x_0, x \in I$  consideriamo la funzione integrale

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Allora la funzione  $F$  è derivabile su  $I$  e  $F'(x) = f(x)$ , per ogni  $x \in I$ .

- b) Poiché  $f(x) = e^{x^2}$  è crescente su  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) \leq f(a) = e^{a^2}$  per ogni  $x \in [0, a]$ . Dunque, per la monotonia dell'integrale:

$$\int_0^a e^{x^2} dx \leq \int_0^a e^{a^2} dx = ae^{a^2}.$$

La disuguaglianza richiesta è verificata per ogni  $M \geq ae^{a^2}$ .

- c) In questo caso la funzione  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2} = +\infty$ . Dunque gli integrali impropri

$\int_0^{+\infty} e^{x^2} dx$  e  $\int_{-\infty}^0 e^{x^2} dx$  divergono e la funzione integrale  $\int_0^x e^{t^2} dt$  non ha asintoti orizzontali.

### 3 Esame del 13 febbraio 2018

**Esercizio 1.** (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log |\sqrt[3]{x} + 2| + \sqrt[3]{x}.$$

- (a) Determinare il dominio di  $f(x)$ , i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.
- (b) Studiare la derivabilità di  $f(x)$  in ciascun punto del suo dominio e calcolarne la derivata.
- (c) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.
- (d) Tracciare qualitativamente il grafico di  $f(x)$ .

(e) Sia

$$g(x) = \frac{x - \alpha}{|x - \alpha|} f(x)$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . A partire dal grafico di  $f(x)$  ottenuto al punto precedente, tracciare un grafico qualitativo di  $g(x)$  per  $\alpha = 1$  e stabilire se esistono valori di  $\alpha$  per i quali la funzione  $g(x)$  possa essere prolungata per continuità in  $x = \alpha$ .

**Esercizio 2.** (5 punti)

- (a) Dare la definizione di funzione crescente su un sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{R}$ .
- (b) Date una funzione  $f$  crescente su  $A$  e una funzione  $g$  decrescente su  $\mathbb{R}$ , stabilire la monotonia della funzione composta  $g \circ f$  su  $A$ , motivando opportunamente la risposta.
- (c) Sia  $A$  l'intervallo  $(3, 5)$  e sia  $f$  crescente su  $A$ . Dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$  non può essere uguale a  $+\infty$ .

## SVOLGIMENTO

### Esercizio 1.

a) La funzione è definita se  $|\sqrt[3]{x} + 2| > 0$ , cioè se  $\sqrt[3]{x} + 2 \neq 0$ . Ne segue che

$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-8\} = (-\infty, -8) \cup (-8, +\infty).$$

Osserviamo inoltre che

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + o(\sqrt[3]{x}), \quad \text{per } x \rightarrow -\infty \text{ e per } x \rightarrow +\infty.$$

Dunque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x} + o(\sqrt[3]{x})) = +\infty$  mentre  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . Poiché  $f$  è un infinito di ordine inferiore a 1 rispetto a  $x$ , per  $x \rightarrow \pm\infty$ , la funzione non ha asintoto obliquo né destro né sinistro.

Inoltre  $\lim_{x \rightarrow -8} f(x) = -\infty$ ; la retta  $x = -8$  è l'unico asintoto verticale di  $f$ . Riassumendo:

- 1)  $f$  non ha asintoti obliqui;
  - 2) la retta  $x = -8$  è asintoto verticale bilaterale per  $f$ .
- b) Osserviamo che  $\sqrt[3]{x}$  non è derivabile in  $x = 0$ ; dunque  $f$  è composizione di funzioni derivabili, e quindi è derivabile, per ogni  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-8, 0\}$ . Dobbiamo verificare invece se  $f$  è derivabile in  $x = 0$ . Possiamo procedere in due modi diversi:

Metodo 1. Usando la definizione di derivata, calcoliamo il limite del rapporto incrementale, con  $x_0 = 0$ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} f(x) &= \log |\sqrt[3]{x} + 2| + \sqrt[3]{x} = \log \left| 2 \left( 1 + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x} \right) \right| + \sqrt[3]{x} = \\ &= \log 2 + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} + o(\sqrt[3]{x}) = \log 2 + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + o(\sqrt[3]{x}), \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log |\sqrt[3]{x} + 2| + \sqrt[3]{x} - \log 2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + o(\sqrt[3]{x})}{x} = +\infty. \end{aligned}$$

Ne segue che  $f$  non è derivabile in  $x = 0$ , che risulta essere un punto (di flesso) a tangente verticale.

Metodo 2. Poiché  $f$  è continua nel suo dominio ed è derivabile se  $x \in \text{dom} f \setminus \{0\}$ , possiamo calcolare la derivata fuori da  $x = 0$  e applicare il teorema “del tappabuchi” per verificare se  $f$  è derivabile in  $x = 0$ .

Ricordando che  $\frac{d}{dx} \log |x| = \frac{1}{x}$ , per ogni  $x \neq 0$ , abbiamo che:

$$f'(x) = \frac{1}{2 + \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \left( \frac{1}{2 + \sqrt[3]{x}} + 1 \right), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-8, 0\}.$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \left( \frac{1}{2 + \sqrt[3]{x}} + 1 \right) = +\infty.$$

Tramite il teorema “del tappabuchi” giungiamo così alla conclusione che  $f$  non è derivabile in  $x = 0$ , che risulta essere un punto (di flesso) a tangente verticale.

- c) Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di  $f$  determiniamo prima i suoi punti critici (cioè i suoi punti a derivata nulla) e poi il segno di  $f'$ .

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \left( \frac{1}{2 + \sqrt[3]{x}} + 1 \right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{3 + \sqrt[3]{x}}{2 + \sqrt[3]{x}};$$

$$f'(x) = 0 \iff 3 + \sqrt[3]{x} = 0 \iff x = -27.$$

Dunque  $x = -27$  è l'unico punto critico di  $f$ , ed è l'unico possibile punto di estremo di  $f$ , visto che l'unico punto di non derivabilità di  $f$  è un punto a tangente verticale. Per studiarne la natura, studiamo il segno di  $f'$ . Vediamo che:

$$3 + \sqrt[3]{x} > 0 \iff x > -27,$$

$$2 + \sqrt[3]{x} > 0 \iff x > -8.$$

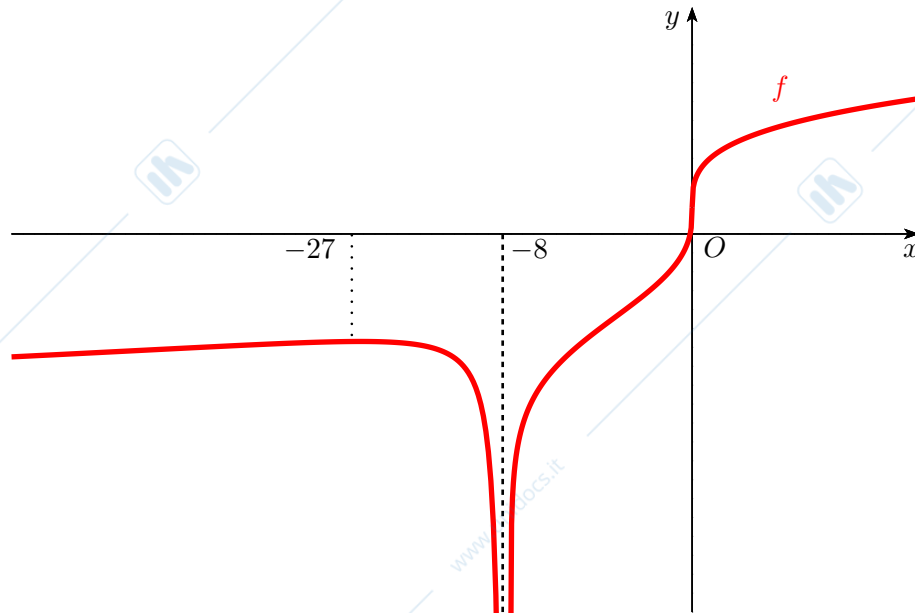
Ne segue che  $f'(x) > 0$  se  $x \in (-\infty, -27) \cup (-8, 0) \cup (0, +\infty)$  e  $f'(x) < 0$  se  $x \in (-27, -8)$ .

Il teorema di Lagrange ci permette di affermare che in ogni intervallo in cui il segno della derivata è costante la funzione è monotona; in particolare:

- $f$  è strettamente crescente su  $(-\infty, -27]$  e su  $(-8, +\infty)$  (ma non necessariamente sull'unione dei due intervalli)
- $f$  è strettamente decrescente su  $[-27, -8)$ .

Inoltre,  $x = -27$  risulta essere un punto di massimo locale (o relativo). Non è un punto di massimo assoluto perché la funzione è illimitata superiormente. Osserviamo inoltre che  $f(-27) = -3$ .

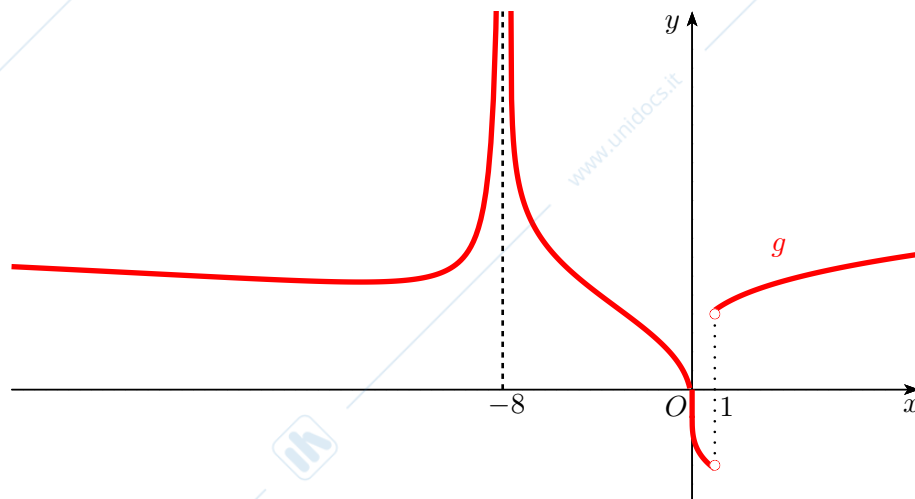
d) Un grafico qualitativo (non in scala) di  $f$  è



e) Osserviamo che , per  $\alpha = 1$ :

$$g(x) = \operatorname{sgn}(x-1)f(x) = \begin{cases} f(x) & x > 1 \\ -f(x) & x < -1, x \neq -8. \end{cases}$$

Dunque il grafico di  $g$  si ottiene dal grafico di  $f$  lasciando invariato il grafico precedente per le  $x > 1$  e considerando il grafico simmetrico rispetto all'asse  $x$ , quando  $x < 1$ . Si ottiene



Osserviamo che la funzione così ottenuta ha una singolarità di tipo salto in  $x = 1$ . L'unico caso in cui la funzione  $g$  presenta una singolarità eliminabile (e dunque è prolungabile per

© 2018 Politecnico di Torino

continuità) è quello in cui  $\alpha$  è uno zero di  $f$ . Poiché  $f$  ha un unico zero  $\bar{x} \in (-8, 0)$  (come si può dimostrare usando il teorema degli zeri),  $g$  risulta prolungabile per continuità in  $\alpha$  se e solo se  $\alpha = \bar{x}$ .

*Attenzione:* poichè per rendere visibile il punto di minimo è stato necessario riscaldare il grafico, il punto di intersezione del grafico di  $f$  con l'asse  $y$  sembra essere l'origine, mentre abbiamo visto che  $f(0) = \log 2$ . In effetti, come affermato in precedenza, la funzione ha uno zero in un punto  $\bar{x} < 0$ .

### Esercizio 2.

a) Si dice che una funzione  $f$  è crescente su un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$  se:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \quad \implies \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

b) Supponiamo ora che  $g$  sia decrescente su  $A$ . Il dominio della funzione composta  $g \circ f$  è dato dalle  $x \in A$  tali che  $f(x) \in \mathbb{R}$ , e dunque  $\text{dom } g \circ f = A$ . Inoltre:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \quad \implies \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Poiché  $g$  è decrescente su  $\mathbb{R}$ , abbiamo che:

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) \geq g(f(x_2)) = g \circ f(x_2).$$

Dunque  $g \circ f$  è decrescente su  $A$ .

c) Sia  $f$  crescente su  $A = (3, 5)$ . Per dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq +\infty$ , possiamo utilizzare due metodi diversi.

Metodo 1 Supponiamo per assurdo che  $f$  abbia limite  $+\infty$ ; allora, per definizione di limite:

$$(3.0) \quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad x \in (3, 3 + \delta) \cap (3, 5) \quad \implies \quad f(x) > M.$$

Possiamo scegliere per esempio  $M = f(4)$ . Dalla (3.0) otteniamo allora che esiste  $\bar{x} < 4$  tale che  $f(\bar{x}) > f(4)$ , contro l'ipotesi che  $f$  sia crescente.

Metodo 2 Il teorema sul limite delle funzioni monotone ci permette di affermare che il limite di  $f$  per  $x \rightarrow 3^+$  esiste e

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in (3, 5)\}.$$

Detto  $\ell$  il limite così ottenuto, per definizione di estremo inferiore di un insieme:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in (3, 3 + \varepsilon) \text{ tale che } \ell \leq f(x) < \ell + \varepsilon.$$

Poiché esiste almeno un numero reale  $f(x) > \ell$ ,  $\ell$  non può essere uguale a  $+\infty$ .

## 4 Esame del 3 luglio 2018

**Esercizio 1.** Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 \sqrt[3]{x+1}.$$

- Determinare il dominio di  $f(x)$ , i limiti agli estremi del dominio e la parte principale di  $f(x)$  rispetto all'infinito campione  $x$ , per  $x \rightarrow +\infty$  e per  $x \rightarrow -\infty$ .
- Studiare la derivabilità di  $f(x)$  in ciascun punto del suo dominio e calcolarne la derivata. Stabilire la natura di eventuali punti di non derivabilità.
- Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.
- Tracciare qualitativamente il grafico di  $f(x)$ .
- Esibire un esempio di una funzione  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strettamente decrescente tale che la funzione composta  $g \circ f$  sia derivabile in  $x = -1$ .

**Esercizio 2.** (5 punti) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + 5y = 0.$$

- Dire cosa significa che una funzione  $y = f(x)$  è soluzione dell'equazione data su un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ .
- Dimostrare che se  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  sono due soluzioni dell'equazione su  $\mathbb{R}$  allora la funzione  $5f_1(x) - 2f_2(x)$  è soluzione dell'equazione su  $\mathbb{R}$ .
- Determinare per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  le soluzioni dell'equazione

$$y'' + 5y = \frac{1}{4}e^{-\alpha x}$$

non sono limitate su  $\mathbb{R}$  (non è richiesto il calcolo esplicito dell'integrale generale).

## SVOLGIMENTO

### Esercizio 1.

a) È chiaro che  $\text{dom } f = \mathbb{R}$ . Inoltre

$$f(x) = x^2 \sqrt[3]{x} + o(x^2 \sqrt[3]{x}), \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \text{ e per } x \rightarrow -\infty,$$

dunque la parte principale di  $f$  rispetto a  $x$  è uguale a  $x^{7/3}$ , per  $x \rightarrow +\infty$  e per  $x \rightarrow -\infty$ ;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Inoltre  $f$  non ha asintoti obliqui perché  $f$  ha ordine di infinito superiore a 1 rispetto a  $x$ , per  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Anche se non è esplicitamente richiesto dall'esercizio, in questo caso è facile vedere che  $x = 0$  e  $x = -1$  sono gli unici due zeri di  $f$ , e che  $f(x) > 0$  se e solo se  $x > -1$ .

b) Poiché  $\sqrt[3]{x+1}$  non è derivabile in  $x = -1$ , la funzione  $f$  è certamente derivabile per  $x \neq -1$  dove è composizione di funzioni derivabili. Poiché  $f$  è continua in  $x = -1$ , per verificare se  $f$  è derivabile in  $x = -1$  possiamo utilizzare il teorema "del tappabuchi". Calcoliamo quindi la derivata di  $f$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sqrt[3]{x+1} + x^2 \frac{1}{3 \sqrt[3]{(x+1)^2}} = \\ &= \frac{6x(x+1) + x^2}{3 \sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{7x^2 + 6x}{3 \sqrt[3]{(x+1)^2}}. \end{aligned}$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 6x}{3 \sqrt[3]{(x+1)^2}} = +\infty.$$

Ne segue che  $f$  non è derivabile in  $x = -1$ , che risulta essere un punto (di flesso) a tangente verticale.

c) Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di  $f$  determiniamo prima i suoi punti critici (cioè i suoi punti a derivata nulla) e poi il segno di  $f'$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{7x^2 + 6x}{3 \sqrt[3]{(x+1)^2}}; \\ f'(x) = 0 &\iff 7x^2 + 6x = x(7x + 6) = 0 \iff x = -\frac{6}{7}. \end{aligned}$$

Dunque  $x = -\frac{6}{7}$  è l'unico punto critico di  $f$ . Inoltre

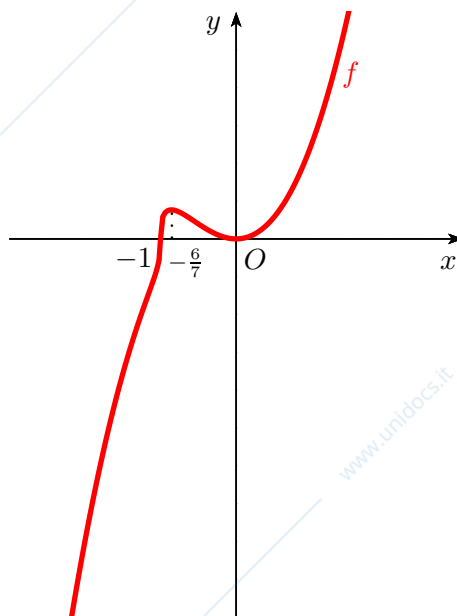
$$f'(x) \geq 0 \iff x(7x + 6) \geq 0.$$

Ne segue che  $f'(x) > 0$  se  $x \in \left(-\infty, -\frac{6}{7}\right) \cup (0, +\infty)$  e  $f'(x) < 0$  se  $x \in \left(-\frac{6}{7}, 0\right)$ . Il teorema di Lagrange ci permette di affermare che in ogni intervallo in cui il segno della derivata è costante la funzione è monotona; in particolare:

- $f$  è strettamente crescente su  $\left(-\infty, -\frac{6}{7}\right]$  e su  $[0, +\infty)$  (ma non necessariamente sull'unione dei due intervalli);
- $f$  è strettamente decrescente su  $\left[-\frac{6}{7}, 0\right)$ .

Inoltre,  $x = 0$  risulta essere un punto di minimo locale (o relativo) e  $x = -\frac{6}{7}$  è un punto di massimo locale. Poiché  $f$  è illimitata superiormente e inferiormente, i punti trovati non sono punti di estremo assoluto. Osserviamo inoltre che  $f(-6/7) = \frac{36}{49} \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$  e  $f(0) = 0$ .

d) Un grafico qualitativo di  $f$  è



e) Se consideriamo per esempio la funzione, strettamente decrescente su  $\mathbb{R}$ ,  $g(t) = -t^3$ , abbiamo che la funzione composta

$$g \circ f(x) = -(x^2 \sqrt[3]{x+1})^3 = -x^6(x+1)$$

è derivabile su  $\mathbb{R}$ ; in particolare, è derivabile in  $x = -1$ .

**Esercizio 2.**

a) Si dice che  $f$  è una soluzione dell'equazione differenziale  $y'' + 5y' = 0$  su un intervallo aperto  $I$  se

- $f$  è derivabile due volte su  $I$ ,
- $f''(x) + 5f'(x) = 0, \forall x \in I$ .

b) Se  $f_1$  e  $f_2$  sono soluzioni dell'equazione differenziale data, devono soddisfare la definizione precedente. Consideriamo ora la funzione  $g(x) = 2f_1(x) - 3f_2(x)$ . Dobbiamo dimostrare che anch'essa soddisfa la definizione precedente. Prima di tutto,  $g$  è derivabile due volte in  $I$  perché è combinazione lineare di funzioni derivabili due volte in  $I$ . Inoltre:

$$\begin{aligned} g(x) &= 2f_1(x) - 3f_2(x), \\ g'(x) &= 2f_1'(x) - 3f_2'(x), \\ g''(x) &= 2f_1''(x) - 3f_2''(x). \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} g''(x) - 5g'(x) &= [2f_1''(x) - 3f_2''(x)] - 5[2f_1'(x) - 3f_2'(x)] = \\ &= 2[f_1''(x) - 5f_1'(x)] - 3[f_2''(x) - 5f_2'(x)] = 0, \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Dunque  $g$  è soluzione dell'equazione differenziale assegnata.

c) Per determinare le soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea  $y'' + 5y' = 0$ , consideriamo l'equazione caratteristica associata  $z^2 + 5z = 0$ , le cui soluzioni sono  $z_{1,2} = \pm 5i$ .

Dunque l'equazione omogenea ha integrale generale  $c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$ , con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Tutte le soluzioni trovate sono limitate su  $\mathbb{R}$ .

Per trovare l'integrale generale dell'equazione completa  $y'' + 5y' = \frac{1}{4} e^{-\alpha x}$  è sufficiente determinarne una soluzione particolare. Dai teoremi generali sappiamo che:

- se  $\alpha \neq 0$ , l'equazione ha una soluzione  $\varphi(x) = ke^{-\alpha x}$ , per qualche  $k \in \mathbb{R}$ ;
- se  $\alpha = 0$ , l'equazione ha una soluzione  $\varphi(x) = k$ , per qualche  $k \in \mathbb{R}$ .

L'integrale generale è  $c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x + \varphi(x)$ , con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . È chiaro che se  $\alpha \neq 0$ , tutte le soluzioni dell'equazione completa sono illimitate su  $\mathbb{R}$ .

Se  $\alpha = 0$ , tutte le soluzioni dell'equazione differenziale completa sono limitate su  $\mathbb{R}$ .

Dunque, per ogni valore  $\alpha \neq 0$ , tutte le soluzioni dell'equazione completa non sono limitate su  $\mathbb{R}$ .

## 5 Esame del 18 settembre 2018

**Esercizio 1.** (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} e^{-1/(x-1)^2}.$$

- Identificare il dominio di  $f(x)$ , i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.
- Mostrare che  $f(x)$  ha un prolungamento continuo  $g(x)$  su  $\mathbb{R}$ . Studiare la derivabilità di  $g(x)$  e calcolarne la derivata.
- Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo di  $g(x)$ , precisando se sono relativi o assoluti.
- Tracciare qualitativamente il grafico di  $g(x)$ .
- Sia

$$F(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

Determinare i punti critici e gli intervalli di monotonia di  $F$ . Stabilire se  $F$  ha massimi o minimi.

**Esercizio 2.** (5 punti)

- Dire che cosa si intende per rappresentazione algebrica e per rappresentazione trigonometrica (o polare) di un numero complesso.
- Determinare e rappresentare (nel piano complesso di Argand-Gauss) le radici cubiche complesse del numero  $w = -1$ .
- Risolvere in  $\mathbb{C}$  l'equazione  $\left(2z + \frac{1}{2}\right)^3 = -1$ .

## SVOLGIMENTO

### Esercizio 1.

a)  $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Anche se non richiesto esplicitamente, osserviamo che  $f(x) > 0$ , per ogni  $x \in \text{dom} f$ .

Inoltre, ponendo  $\frac{1}{(x-1)^2} = t$ , abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} e^{-1/(x-1)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-t} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)^2} e^{-1/(x-1)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} t e^{-t} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-1)^2} e^{-1/(x-1)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} t e^{-t} = 0.$$

b) Poiché  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ ,  $f$  ha prolungamento continuo su  $\mathbb{R}$ ; il suo prolungamento  $g$  è:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 1 \\ 0 & x = 1. \end{cases}$$

Inoltre, per ogni  $x \neq 1$ ,  $g$  è derivabile e

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{2}{(x-1)^3} e^{-1/(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \frac{2}{(x-1)^3} e^{-1/(x-1)^2} = \\ &= \frac{2}{(x-1)^3} e^{-1/(x-1)^2} \left[ -1 + \frac{1}{(x-1)^2} \right] = \\ &= \frac{2}{(x-1)^3} e^{-1/(x-1)^2} \left[ \frac{2x - x^2}{(x-1)^2} \right]. \end{aligned}$$

Poiché  $g$  è continua in  $x = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 1} g'(x) = 0$ , la funzione  $g$  è derivabile su  $\mathbb{R}$  e  $g'(1) = 0$ .

c) Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di  $g$  determiniamo prima i suoi punti critici (cioè i suoi punti a derivata nulla) e poi il segno di  $g'$ .

Osserviamo che per  $g'(x) = 0$  se  $x = 1$  o se  $2x - x^2 = 0$ . Dunque i punti critici di  $f$  sono  $x = 0$ ,  $x = 1$  e  $x = 2$ .

Per determinare il segno di  $g'$  osserviamo che

$$\bullet e^{-1/(x-1)^2} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\bullet \frac{2}{(x-1)^3} > 0 \quad \iff \quad x \in (1, +\infty)$$

$$\bullet \frac{2x - x^2}{(x-1)^2} > 0 \quad \iff \quad x \in (0, 1) \cup (1, 2)$$

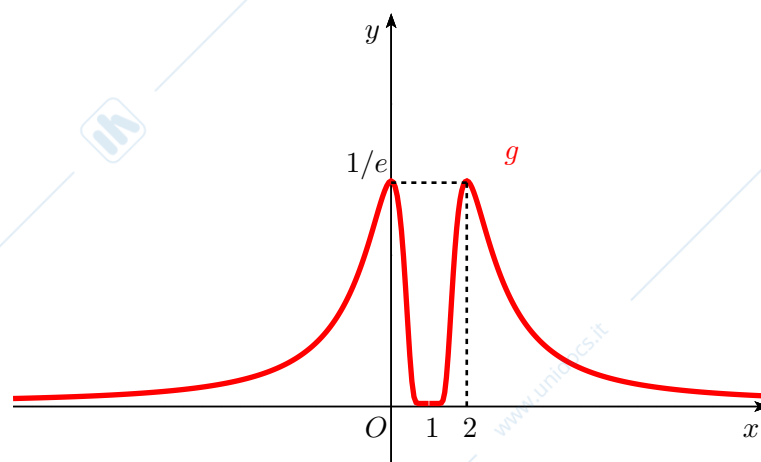
Studiando il segno del prodotto dei tre fattori, otteniamo che:  $g'(x) > 0$  se e solo se  $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$  e  $g'(x) < 0$  se e solo se  $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$ . Il teorema di Lagrange ci permette di affermare che in ogni intervallo in cui il segno della derivata è costante la funzione è monotona; in particolare:

- $g$  è strettamente crescente su  $(-\infty, 0]$  e su  $[1, 2]$  (ma non necessariamente sull'unione dei due intervalli),
- $g$  è strettamente decrescente su  $[0, 1]$  e su  $[2, +\infty)$  (ma non necessariamente sull'unione dei due intervalli).

Ne segue che:

- $x = 1$  è l'unico punto di minimo, locale e assoluto.
- $x = 0$  e  $x = 2$  sono entrambi punti di massimo locale. Poiché  $g(0) = g(2) = 1/e$ , entrambi i punti sono anche di massimo assoluto.

d) Un grafico qualitativo di  $g$  è



e) Poiché  $g$  è continua su  $\mathbb{R}$ , per il Teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione integrale  $F(x) = \int_0^x g(t) dt$  è continua e derivabile su  $\mathbb{R}$ ; inoltre

$$F'(x) = g(x) > 0, \forall x \neq 1,$$

dunque  $F$  ha l'unico punto critico  $x = 1$ . Inoltre  $F$  è strettamente crescente su  $\mathbb{R}$  e non ha punti di massimo o di minimo.

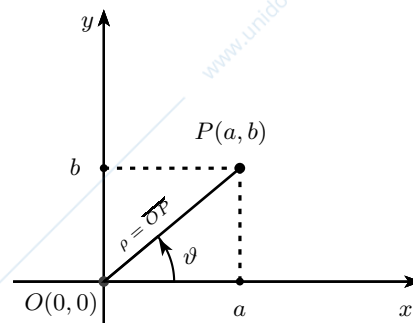
**Esercizio 2.**

- a) Posto formalmente  $i = \sqrt{-1}$ , un qualunque numero complesso viene rappresentato in forma algebrica come  $z = a + ib$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Il numero complesso  $z$  può essere identificato con la coppia  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  e venire quindi rappresentato nel piano cartesiano, che in questo caso prende il nome di piano di Argand-Gauss. Si può quindi rappresentare  $z$  in coordinate polari, ottenendo la cosiddetta rappresentazione trigonometrica di un numero complesso:

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

dove  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$  è la distanza del punto  $P(a, b)$  dall'origine e  $\vartheta$  è l'angolo formato dalla semiretta  $OP$  con il semiasse delle ascisse positive. (vedi figura)



- b) In forma trigonometrica, si ha  $w = -1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$ . Dette  $z_i$ , con  $i = 0, 1, 2$  le radici cubiche (in campo complesso) di  $w$ , si ha che:

$$|z_i| = \sqrt[3]{|-1|} = 1, \quad \text{per } i = 0, 1, 2$$

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$\vartheta_1 = \frac{\pi + 2\pi}{3} = \pi$$

$$\vartheta_2 = \frac{\pi + 4\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

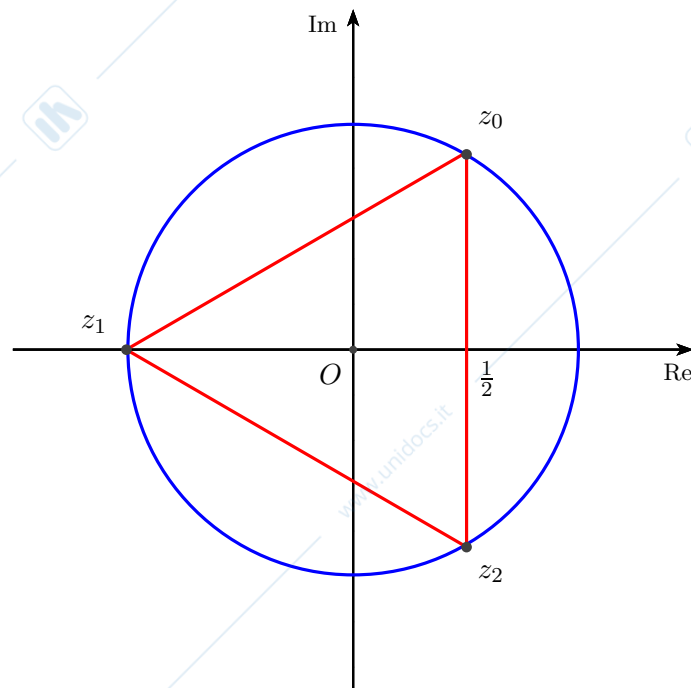
Ne segue che:

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Nel piano di Argand-Gauss i tre punti costituiscono i vertici di un triangolo equilatero, inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio 1 (vedi figura).



c) Dobbiamo risolvere l'equazione

$$\left(2z + \frac{1}{2}\right)^3 = -1.$$

Se poniamo  $v = 2z + \frac{1}{2}$ , otteniamo l'equazione  $v^3 = -1$ , le cui soluzioni sono le tre radici cubiche di  $-1$ , che abbiamo calcolato al punto precedente. Poiché  $z = \frac{1}{2}\left(v - \frac{1}{2}\right)$ , le tre soluzioni dell'equazione sono:

$$z_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

$$z_1 = \frac{1}{2} \left( -1 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{4}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i - \frac{1}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} i$$