Quiz 4. Dato

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \to (x + y, y + z, z + x),$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $(1, 0, 0)$ è un autovettore di f.
b) $(1, 1, 0)$ è un autovettore di f.
c) 2 è un autovalore di f.
d) 0 è un autovalore di f.

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Infatti dalla definizione di f segue che $f(1, 0, 0) = (1, 0, 1) \notin \mathcal{L}((1, 0, 0))$.

L'affermazione b) è falsa. Infatti dalla definizione di f segue che $f(1, 1, 0) = (2, 1, 1) \notin \mathcal{L}((1, 0, 0))$.

L'affermazione c) è vera. Infatti dalla definizione di f segue che la sua matrice è

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sicché

$$p_f(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ 0 & t-1 & -1 \\ -1 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3 - 1.$$

Segue che $p_f(2) = 1 - 1 = 0$

L'affermazione d) è falsa. Infatti nel caso precedente si osserva che $p_f(0) = -1 - 1 = -2 \neq 0$

Quiz 5. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ e si supponga che f abbia autovalori 1 e -1. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Se v è autovettore non nullo associato a 1 allora $-v$ è autovettore associato a -1.
b) $f^n = id$ per ogni $n \geq 2$.
c) f è invertibile ed $f^{-1} = f$.
d) f non è invertibile.

Svolgimento. Indichiamo con $E_f(1) := \mathcal{L}((a, b))$ e con $E_f(-1) := \mathcal{L}((c, d))$ gli autospazi di 1 a di -1 rispettivamente. Ricordo che $\mathcal{B} := ((a, b), (c, d))$ è una base di $\mathbb{R}^2$, dunque

$$P := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

è invertibile e si ha

$$P^{-1}M(f)P = D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'affermazione a) è falsa. Infatti $E_f(1)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, pertanto $-v \in E_f(1)$.

L'affermazione b) è falsa. Infatti

$$M(f^n) = M(f)^n = \overbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})}^{\text{n volte}} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n P^{-1}.$$

Se $n \geq 2$ è dispari chiaramente

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n P^{-1} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(id).$$