Lezione 4

4.1 Operazioni elementari di riga

Nella lezione precedente abbiamo visto un metodo per risolvere un sistema lineare la cui matrice dei coefficienti sia fortemente ridotta per righe, o anche solo ridotta per righe. Avere a che fare con un tale sistema è però abbastanza raro. Un'idea può allora essere quella di trasformare il sistema che vogliamo risolvere in un nuovo sistema che abbia *le stesse soluzioni* e che abbia una matrice fortemente ridotta per righe, risolvendo poi quest'ultimo invece di quello di partenza.

Definizione 4.1 (Sistemi equivalenti). Due sistemi di equazioni (non necessariamente lineari) si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Esempio 4.2. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=-3 \end{cases} \tag{4.1.1}$$

avente matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right),$$

che chiaramente non è ridotta per righe.

Però possiamo sostituire al posto della seconda equazione in (4.1.1) la somma delle due equazioni, ottenendo il nuovo sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3z=-2 \end{cases} \tag{4.1.2}$$

avente matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{2} & 0 & 3 & -2 \end{array}\right),$$

che, invece, è ridotta per righe. Ci domandiamo però se questa sostituzione lascia invariate o meno le soluzioni del sistema di partenza. Per mostrare che le soluzioni sono invariate, supponiamo che ${}^t\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix}$ sia una soluzione del sistema (4.1.1) e, quindi, che valgano le uguaglianze

$$\begin{cases} x_0+y_0+z_0-1=0 \\ x_0-y_0+2z_0+3=0. \end{cases}$$

In tal caso

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 - 1 = 0 \\ 2x_0 + 3z_0 + 2 = (x_0 + y_0 + z_0 - 1) + (x_0 - y_0 + 2z_0 + 3) = 0, \end{cases}$$

e, quindi, ${}^t\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix}$ è anche soluzione del sistema (4.1.2).

Viceversa, il sistema (4.1.1) si può ottenere dal sistema (4.1.2) sostituendo alla sua seconda equazione la differenza della seconda equazione meno la prima, quindi con lo stesso ragionamento, le soluzioni di (4.1.2) sono anche soluzioni di (4.1.1). Concludiamo che l'insieme delle soluzioni di (4.1.1) coincide con l'insieme delle soluzioni di (4.1.2).

Ora che ci siamo assicurati di poter risolvere il sistema (4.1.2) invece del più difficile sistema (4.1.1), procediamo a trovarne le soluzioni. Dividiamo la seconda equazione per 2 ottenendo il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 3z/2 = -1 \end{cases} \tag{4.1.3}$$

la cui matrice completa è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

È facile osservare che il nuovo sistema (4.1.3) ha ancora le stesse soluzioni del sistema di partenza (4.1.1). Come ultimo passaggio sottraiamo dalla prima equazione di (4.1.3) la seconda, ottenendo il sistema

$$\begin{cases} y - z/2 = 2 \\ x + 3z/2 = -1 \end{cases} \tag{4.1.4}$$

avente matrice completa associata

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & -1/2 & 2 \\ \boxed{1} & 0 & 3 & -1 \end{array}\right),$$

che è fortemente ridotta per righe e che, di nuovo, ha le stesse soluzioni di tutti gli altri sistemi precedenti. Risolvendo il sistema (4.1.4) come spiegato nell'Esempio 3.7, otteniamo che l'insieme di tutte le soluzioni dei sistemi di questo esempio è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 - 3z/2 \\ 2 + z/2 \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}.$$ ♠

⚠ Due sistemi equivalenti non hanno necessariamente lo stesso numero di equazioni. Per esempio, si verifichi che i due seguenti sistemi sono equivalenti:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y = -1 \\ z = 1. \end{cases}$$

Siamo interessati a capire se possiamo ripetere in generale quanto fatto nell'Esempio 4.2, ovvero se esistono delle operazioni che possiamo fare sulle equazioni di un sistema che lo trasformino in un sistema equivalente con matrice associata fortemente ridotta per righe.

Per enunciare il risultato generale introduciamo la seguente definizione.

Definizione 4.3 (**Operazioni elementari di riga e matrici equivalenti per righe**). Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $A \in K^{m,n}$ una matrice.

Le *operazioni elementari di riga* su A sono:

(E1) sommare ad una riga di A un multiplo di un'altra riga di A;

(E2) moltiplicare una riga di A per una costante non nulla $\alpha \in K$;

(E3) scambiare due righe di A.

Due matrici $A, \widehat{A} \in K^{m,n}$ tali che esiste una successione finita di operazioni elementari di riga che trasforma A in $\widehat{A}$ si dicono *equivalenti per righe*.

Per comodità introduciamo anche la seguente notazione per le tre operazioni:

(E1) $R_i \to R_i + \alpha R_{i_0}$ denota l'operazione di sommare alla riga di indice i la riga di indice $i_0 \neq i$ moltiplicata per $\alpha \in K$;

(E2) $R_i \to \alpha R_i$ denota l'operazione di moltiplicare la riga di indice i per $\alpha \neq 0$;

(E3) $R_i \leftrightarrow R_{i_0}$ denota l'operazione di scambiare le righe indici i e i_0.

Il risultato fondamentale è il seguente.

Proposizione 4.4. *Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $A \in K^{m,n}$ una matrice. Allora A è equivalente per righe a una matrice $\widehat{A} \in K^{m,n}$ (fortemente) ridotta per righe.*

Dimostrazione. Sia $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, e supponiamo che $A \neq 0_{m,n}$ (altrimenti non c'è nulla da dimostrare).

Sia i_0 il più piccolo indice per cui esiste $a_{i_0,j_0} \neq 0$. Moltiplicando la riga di indice i_0 per a_{i_0,j_0}^{-1}:

$$A \xrightarrow{R_{i_0} \to a_{i_0,j_0}^{-1} R_{i_0}} A'$$

trasformiamo la matrice A in una nuova matrice A' avente l'entrata 1 in posizione (i_0, j_0).

Per ogni $i \neq i_0$ sostituiamo la riga di indice i con la sua somma alla riga di indice i_0 moltiplicata per a_{i,j_0}

$$A' \xrightarrow{R_i \to R_i - a_{i,j_0} R_{i_0}} A''$$

trasformiamo la matrice A' in una nuova matrice $A'' = (a''_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la cui colonna di indice j_0 contiene un'unica entrata non nulla che vale 1 in posizione (i_0, j_0).

A questo punto si presentano due possibilità. Nel primo caso tutte le righe di indice $i \neq i_0$ sono nulle, quindi scambiando la riga di indice i_0 con la riga di indice 1

$$A'' \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_{i_0}} A'''$$

trasformiamo A'' in una nuova matrice $A''' = (a'''_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la cui colonna di indice j_0 contiene un'unica entrata non nulla che vale 1 in posizione $(1, j_0)$ e tale che $a'''_{i,j} = 0$ per ogni $i > 1$. Quindi $\widehat{A} = A'''$ è fortemente ridotta per righe.

Nel secondo caso ripetiamo lo stesso procedimento con il più piccolo indice $i_1 > i_0$ per cui esiste $a''_{i_1,j_1} \neq 0$. Poiché $a''_{i,j_0} = 0$ per $i \neq i_0$ segue che $j_1 \neq j_0$.

In questo modo dopo al più m passi (uno per ogni riga) otteniamo una matrice $\widehat{A}$ fortemente ridotta per righe. □

Esempio 4.5. Trasformiamo la seguente matrice in matrice fortemente ridotta per righe, usando operazioni elementari.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to (1/3)R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che è fortemente ridotta per righe. ♠

Esempio 4.6. Come nell'Esempio 4.5, trasformiamo la seguente matrice in matrice fortemente ridotta per righe, usando operazioni elementari.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 4 & 7 \end{pmatrix} = A',$$

dove A' è ridotta per righe. Possiamo proseguire:

$$A' \xrightarrow[R_4 \to -R_4/2]{R_2 \to R_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7/2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_4]{R_2 \to R_2 + 3R_4/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 9/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -19/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7/2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 37/4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -19/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 6 & 37/4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & -19/4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \widehat{A},$$

ottenendo infine una matrice fortemente ridotta per righe. ♠

Concludiamo il paragrafo menzionando che come esistono le matrici (fortemente) ridotte per colonne, esiste un concetto di operazioni elementari di colonna, ma per ora non ci complicheremo troppo la vita.

4.2 Rango di una matrice

È chiaro che le operazioni di riga che si possono fare per trasformare una matrice in una (fortemente) ridotta non sono univocamente determinate, anzi ad ogni passo è possibile fare scelte diverse! Di conseguenza da ogni matrice, con operazioni elementari di riga, si potranno ottenere varie matrici fortemente ridotte per righe, anche molto diverse: infatti, ad ogni passo, bisogna fare una scelta del pivot.

Però si può dimostrare che, indipendentemente dalle operazioni fatte, il numero di righe contenenti entrate non nulle non cambia.

Proposizione 4.7. *Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $A \in K^{m,n}$ una matrice e A' ed A'' due matrici ridotte per righe equivalenti per righe ad A. Allora i numeri di righe di A' e di A'' contenenti entrate non nulle coincidono.*

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. Vedremo in seguito che tale numero dipende solo da A (coincide con un numero chiamato “dimensione dello spazio riga di A”) e non dalla riduzione operata. □

Si può facilmente immaginare che tale numero riveste un'importanza particolare nell'algebra delle matrici, pertanto merita un nome particolare.

Definizione 4.8 (Rango di una matrice). Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $A \in K^{m,n}$ una matrice e sia A' una matrice ridotta per righe equivalente per righe ad A.

Il numero di righe di A' contenenti entrate non nulle viene detto *rango* di A ed indicato con il simbolo $\mathrm{rk}(A)$.

Proposizione 4.9. *Sia $A \in K^{m,n}$. Allora* $\mathrm{rk}(A) \leqslant \min\{\ m, n\ \}$.

Dimostrazione. Per definizione $\mathrm{rk}(A) \leqslant m$. Inoltre $\mathrm{rk}(A)$ coincide con il numero di pivot di una forma ridotta per righe di A: ognuno di essi si trova necessariamente in una colonna diversa, quindi si ha anche $\mathrm{rk}(A) \leqslant n$. □

Esempio 4.10. Le matrici degli Esempi 4.5 e 4.6 hanno rispettivamente $\mathrm{rk}(A) = 2$ e $\mathrm{rk}(A) = 3$. ♠

Esempio 4.11. Studiamo il rango della matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2k \\ 1 & 1 & -k & 2k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Riduciamo C per righe

$$C \xrightarrow{R_2 \to (1/2)R_2} \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & k \\ 1 & 1 & -k & 2k \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 0 & 1-k & 0 & k-2 \\ 0 & 1-k & 1-k & 2k-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 0 & 1-k & 0 & k-2 \\ 0 & 0 & 1-k & k \end{pmatrix} = C'.$$

A questo punto abbiamo due possibilità : o $k = 1$, o $k \neq 1$. Se $k = 1$, la matrice ottenuta è

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2. Altrimenti se $k \neq 1$, possiamo dividere per $k-1$ che è diverso da zero, ottenendo

$$C' \xrightarrow[R_3 \to (1/k-1)R_3]{R_2 \to (1/k-1)R_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & k & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{k-2}{k-1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{k}{k-1} \end{pmatrix}.$$

Quindi il rango è uguale a 3 se $k \neq 1$. ♠

⚠ Testi diversi utilizzano notazioni diverse per denotare il rango di una matrice, non solo $\mathrm{rk}(A)$, ma anche $\mathrm{rg}(A)$, $r(A)$, $\rho(A)$, $N(A)$.