Lezione 11

11.1 Minima distanza tra insiemi

Definizione 11.1. In S_n, $n = 2, 3$, sia fissata un'unità di misura u.

Dati due punti $A, B \in S_n$, definiamo *distanza fra* A *e* B, e scriviamo $d(A, B)$, la lunghezza del segmento $\overline{AB}$ rispetto all'unità di misura u.

Abbiamo già visto nella Lezione 7 come calcolare la lunghezza di un segmento avente come estremi due punti $A, B \in S_3$ di cui si conoscono le coordinate rispetto ad un fissato sistema di riferimento $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$: se $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$, allora la formula (7.3.1) afferma che

$$d(A, B) = |\overline{AB}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

Vogliamo estendere la nozione di distanza ad una qualsiasi coppia di sottoinsiemi $X, Y \subseteq S_n$. Osserviamo subito che, in generale, X ed Y conterranno più punti, quindi avremo più segmenti aventi un estremo in X ed uno in Y.

È possibile perciò associare agli insiemi X ed Y un insieme di numeri reali

$$D_{X,Y} = \{\ d(x, y) \mid x \in X, y \in Y\ \}.$$

Poiché $d(x, y) \geqslant 0$ per ogni coppia di punti $x, y \in S_n$ segue che $D_{X,Y} \subseteq [0, +\infty[$. In particolare $D_{X,Y}$ è un insieme limitato inferiormente, quindi risulta avere un estremo inferiore per la completezza di $\mathbb{R}$.

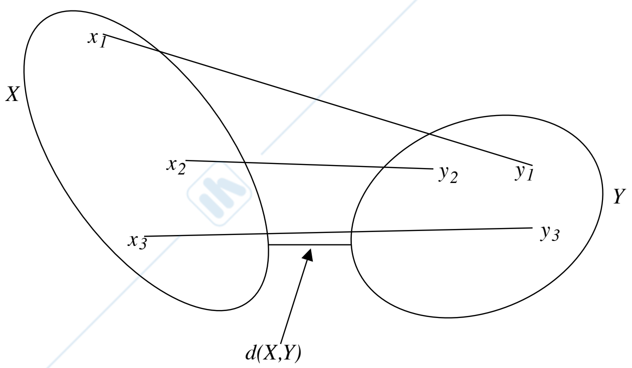

Figura 11.1

Definizione 11.2 (Minima distanza). In S_n, $n = 2, 3$, sia fissata un'unità di misura u.

Dati due sottoinsiemi $X, Y \subseteq S_n$, definiamo *minima distanza fra X e Y* (o semplicemente *distanza*) il numero

$$d(X, Y) = \inf\{\ d(x, y) \mid x \in X, y \in Y\ \}.$$

Verrebbe naturale pensare alla distanza fra X ed Y come alla "minima" delle distanze fra i punti di X ed i punti di Y, ma in generale ciò non è vero.

Esempio 11.3. In S_2 si considerino gli insiemi $X = \{\ (-1/n, 0) \mid n \in \mathbb{Z}, n > 0\ \}$ e $Y = \{(0, 0)\}$. Allora

$$d(X, Y) = \inf\{\ d((-1/n, 0), (1, 0)) \mid n \in \mathbb{Z}, n > 0\ \} = 0,$$

ma, chiaramente, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, vale

$$d((-1/n, 0), (0, 0)) = \frac{1}{n} > 0. \qquad \spadesuit$$

⚠ Il viceversa non è vero, cioè se $d(X, Y) = 0$ non è detto che $X \cap Y \neq \emptyset$, come si vede dall'Esempio 11.3.

Si noti che se i due insiemi X e Y sono formati da un punto ciascuno, ad esempio $X = \{A\}$ e $Y = \{B\}$, allora

$$d(X, Y) = d(A, B).$$

Inoltre, se i due insiemi hanno intersezione non vuota, $X \cap Y \neq \emptyset$, allora hanno distanza nulla. Infatti scelto $A \in X \cap Y$ risulta

$$0 \leqslant d(X, Y) = \inf\{\ d(x, y) \mid x \in X, y \in Y\ \} \leqslant d(A, A) = 0,$$

sicché $d(X, Y) = 0$.

11.2 Distanza di un punto da una retta o da un piano

In questo paragrafo spiegheremo come calcolare la distanza $d(X, Y)$ nei due casi in cui $X = \{\ P_0\ \}$ e Y è una retta o un piano. A tale scopo ci restringeremo al caso di sottoinsiemi dello spazio S_3 e supporremo, d'ora innanzi, di aver fissato un sistema di riferimento $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$, nel quale $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Cominciamo dal caso in cui Y è un piano α di equazione $ax + by + cz = d$: dobbiamo quindi valutare la quantità

$$d(P_0, \alpha) = \inf\{\ d(P_0, P) \mid P \in \alpha\ \}.$$

Si consideri la retta r passante per P_0, perpendicolare ad α e sia H il punto di intersezione di r con α, come illustrato nella Figura 11.2.

Se $P = (x, y, z) \in \alpha$, il triangolo di vertici P_0, H e P risulta essere rettangolo in H. È noto dalla geometria elementare che, in un triangolo rettangolo, la lunghezza dell'ipotenusa è sempre maggiore od eguale alla lunghezza di ogni suo cateto: in particolare $d(P_0, H) \leqslant d(P_0, P)$ per ogni $P \in \alpha$. D'altra parte fra i punti che intervengono nella definizione di $d(P_0, \alpha)$ c'è anche H, quindi risulta

$$d(P_0, H) \leqslant d(P_0, \alpha) = \inf\{\ d(P_0, P) \mid P \in \alpha\ \} \leqslant d(P_0, H).$$

Ne deduciamo che $d(P_0, \alpha) = d(P_0, H)$: in questo caso l'estremo inferiore è un minimo.

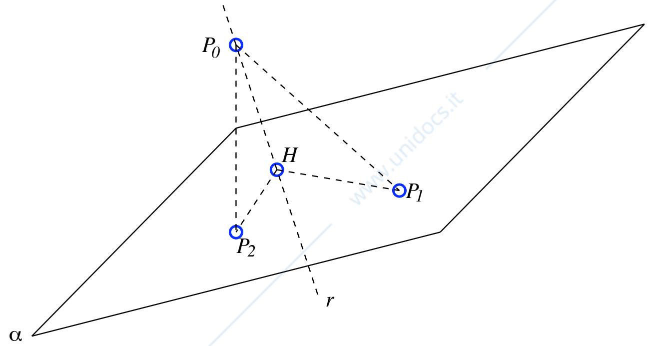

Figura 11.2

Passiamo ora a determinare una formula esplicita per calcolare $d(P_0, \alpha)$; abbiamo appena visto che si tratta di calcolare la distanza $d(P_0, H)$ e questo numero può essere facilmente calcolato osservando che coincide con la lunghezza della proiezione del vettore

$$P_0 - P = (x_0 - x)\vec{\imath} + (y_0 - y)\vec{\jmath} + (z_0 - z)\vec{k}$$

lungo una direzione r ortogonale a α.

Ricordiamo dall'Osservazione 8.10 che, dato un vettore $\vec{w}$ ed una retta r per l'origine, la proiezione ortogonale $\vec{w}_\parallel$, di $\vec{w}$ lungo r si ottiene come

$$\vec{w}_\parallel = \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|},$$

ove $\vec{v}$ è un qualsiasi vettore parallelo a r: dunque

$$|\vec{w}_\parallel| = \frac{|\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle|}{|\vec{v}|}.$$

Nel nostro caso $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ è perpendicolare ad α, perciò

$$\begin{aligned} d(P_0, H) = |P_0 - H| &= \frac{|a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - ax - by - cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

D'altra parte $P \in \alpha$, quindi le sue coordinate soddisfano $ax + by + cz = d$: in conclusione otteniamo

$$d(P_0, \alpha) = d(P_0, H) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{11.2.1}$$

Esempio 11.4. In S_3 sia fissato sistema di riferimento $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$ e si considerino il punto $P_0 = (1, 2, 3)$ e il piano α di equazione cartesiana $3x - 2y - z = 0$. Allora, utilizzando la formula (11.2.1), si ha

$$d(P_0, \alpha) = \tfrac{|3-4-3|}{\sqrt{9+4+1}} = \tfrac{4}{\sqrt{14}}.$$

Ovviamente $d(P_0, \alpha)$ può anche essere ottenuta direttamente come $d(P_0, H) = |H - P_0|$. Nel nostro caso la retta r passante per P_0 e perpendicolare ad α ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

Quindi $H = (x_H, y_H, z_H)$, punto di intersezione di r con α, corrisponde alla soluzione dell'equazione $3(1 + 3t) - 2(2 - 2t) - (3 - t) = 0$, cioè a $t = 2/7$, ovvero $H = (13/7, 10/7, 19/7)$. In particolare $H - P_0 = (6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 2\vec{k})/7$, da cui segue

$$d(P_0, \alpha) = d(P_0, H) = |H - P_0| = \sqrt{\tfrac{8}{7}} = \tfrac{4}{\sqrt{14}}. \qquad \spadesuit$$

Come secondo caso consideriamo la distanza tra un punto P_0 e una retta r in S_3, per cui dobbiamo valutare la quantità

$$d(P_0, r) = \inf\{\, d(P_0, P) \mid P \in r \,\}.$$

Sia s la retta passante per P_0, perpendicolare ed incidente a r e sia H il punto di intersezione di r con s. Come nel caso precedente deduciamo che $d(P_0, r) = d(P_0, H)$ e, di nuovo, l'estremo inferiore è un minimo. Anche in questo caso cerchiamo formula per determinare $d(P_0, H)$.

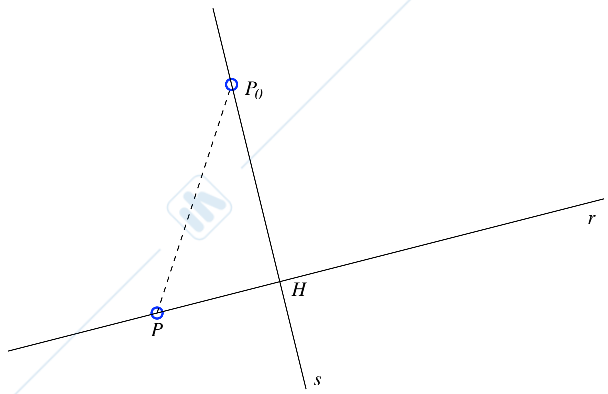

Figura 11.3

La determinazione della retta s può non essere facile: tale retta deve infatti essere perpendicolare e, simultaneamente, incidente ad r. Abbiamo due modi per calcolare s.

Un primo modo consiste nell'osservare che s è sempre contenuta nel piano α passante per P_0 e perpendicolare a r, sicché $r \cap s = r \cap \alpha$. La determinazione di un'equazione di α è, in generale, semplice, così come calcolarne l'intersezione H con r: a questo punto $d(P_0, r) = d(P_0, H)$.

Alternativamente, siano P_1 e P_2 punti arbitrari su r. Osserviamo dalla Figura 11.4 che il segmento $\overline{P_0H}$ è esattamente l'altezza di un parallelogramma avente lato obliquo $\overline{P_0P_1}$ e base $\overline{P_1P_2}$.

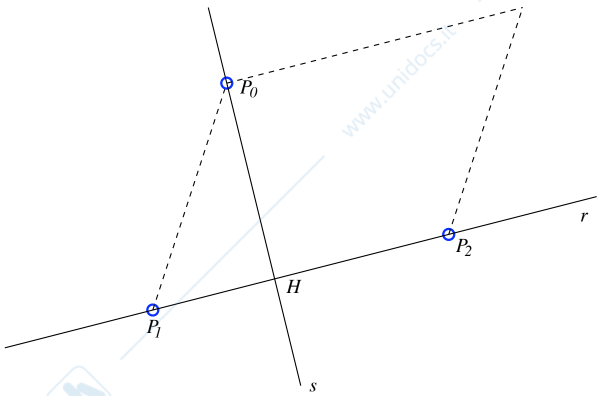

Figura 11.4

Se $\mathcal{A}$ è la misura dell'area di tale parallelogramma, allora

$$d(P_0, r) = d(P_0, H) = |\overline{P_0H}| = \frac{\mathcal{A}}{|\overline{P_1P_2}|}.$$

Ricordiamo quanto visto nell'Osservazione 8.17: se abbiamo un parallelogramma di cui conosciamo tre vertici consecutivi P_0, P_1, P_2 la sua area $\mathcal{A}$ si può determinare con la formula (8.2.2):

$$\mathcal{A} = |(P_0 - P_1) \times (P_1 - P_2)|.$$

Nel nostro caso, se la retta r è data tramite equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt, \end{cases}$$

presi ad esempio P_1 e P_2 i punti corrispondenti rispettivamente a $t = 0$ e $t = 1$, cioè $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_1 + l, y_1 + m, z_1 + n)$, segue che

$$d(P_0, r) = \frac{|((x_0 - x_1)\vec{\imath} + (y_0 - y_1)\vec{\jmath} + (z_0 - z_1)\vec{k}) \times (l\vec{\imath} + m\vec{\jmath} + n\vec{k})|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (11.2.2)$$

Esempio 11.5. In S_3 sia fissato sistema di riferimento $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$ e si considerino il punto $P_0 = (1, 2, 3)$ e la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = t - 2 \\ z = 2t - 3, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Un vettore parallelo a r è $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, quindi il piano α passante per P_0 e perpendicolare a r ha equazione cartesiana $x + y + 2z = 9$. Il punto d'intersezione $H = (x_H, y_H, z_H)$ di r con α corrisponde alla soluzione dell'equazione

$$(3 + t) + (t - 2) + 2(2t - 3) = 9$$

cioè $t = 7/3$, sicché $H = (16/3, 1/3, 5/3)$. Risulta $H - P_0 = (13\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - 4\vec{k})/3$, da cui segue

$$d(P_0, r) = d(P_0, H) = |H - P_0| = \sqrt{\frac{210}{9}}.$$

Calcoliamo di nuovo la stessa distanza utilizzando la formula (11.2.2). Poiché $P_0 - P_1 = -2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 6\vec{k}$, si ha

$$d(P_0, r) = \frac{|(-2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 6\vec{k}) \times (\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k})|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{|2\vec{\imath} + 10\vec{\jmath} - 6\vec{k}|}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{140}{6}}. \qquad \spadesuit$$

11.3 Distanza di un piano da una retta o da un piano

In questo paragrafo spiegheremo come calcolare la distanza $d(X, Y)$ nel caso in cui X sia un piano fissato α. Come al solito, supporremo di aver fissato sistema di riferimento $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$ nello spazio S_3 e che $ax + by + cz = d$ sia l'equazione di α.

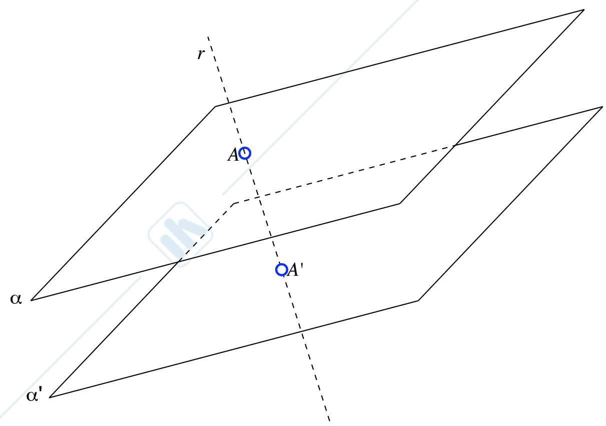

Figura 11.5

Iniziamo ad esaminare il caso in cui Y sia un secondo piano α', di equazione cartesiana $a'x + b'y + c'z = d'$. Ovviamente se $\alpha \not\parallel \alpha'$ allora $\alpha \cap \alpha' \neq \emptyset$, dunque $d(\alpha, \alpha') = 0$. Possiamo perciò ridurci ad esaminare il caso in cui $\alpha \parallel \alpha'$, come in Figura 11.5.

Per ogni punto $A \in \alpha$ sia $A' \in \alpha'$ l'unico punto tale che

$$d(A, \alpha') = d(A, A').$$

Come già osservato nel paragrafo precedente, per ogni altro punto $P \in \alpha'$ si ha $d(A, A') \leqslant d(A, P)$ e quindi per ogni $A \in \alpha$

$$\begin{aligned} d(\alpha, \alpha') &= \inf\{\, d(A, A') \mid A \in \alpha, A' \in \alpha' \,\} \\ &\leqslant \inf\{\, d(A, A') \mid A' \in \alpha' \,\} = d(A, A') \\ &\leqslant \inf\{\, d(A, P) \mid A \in \alpha, P \in \alpha' \,\} = d(\alpha, \alpha'). \end{aligned}$$

Utilizzando la formula (11.2.1) che esprime la distanza del punto $A = (x_A, y_A, z_A)$ dal piano α', otteniamo

$$d(\alpha, \alpha') = d(A, \alpha') = \frac{|a'x_A + b'y_A + c'z_A - d'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Poiché $\alpha \parallel \alpha'$ possiamo supporre che $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$. Inoltre il fatto che $A \in \alpha$ implica che le sue coordinate soddisfano $ax_A + by_A + cz_A = d$. Concludiamo allora che

$$d(\alpha, \alpha') = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{11.3.1}$$

Si noti che la quantità $|d - d'|$ coincide con la distanza tra α e α' solamente se $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$.

Esempio 11.6. In S_3 sia fissato sistema di riferimento $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$ e si considerino i piani α, α' e α'' rispettivamente di equazioni cartesiane

$$\alpha : \ x + y + z = 1, \qquad \alpha' : \ x - y + 2z = -1, \qquad \alpha'' : \ y - 2z - x = -1.$$

Iniziamo a considerare i due piani α e α'. Poiché

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

segue che $\alpha \not\parallel \alpha'$, dunque $d(\alpha, \alpha') = 0$.

Consideriamo ora i due piani α' e α''. Poiché

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1,$$

segue che $\alpha' \parallel \alpha''$. Per determinare la distanza $d(\alpha', \alpha'')$ utilizzando la formula (11.3.1) si devono prima modificare le equazioni date di α' e α'' in modo che abbiano lo stesso primo membro: possiamo allora supporre che le due equazioni siano rispettivamente

$$\alpha' : \ x - y + 2z = -1, \qquad \alpha'' : \ x - y + 2z = 1,$$

quindi la formula (11.3.1) ci dà

$$d(\alpha', \alpha'') = \frac{|-1-1|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{6}}. \qquad \spadesuit$$

In maniera simile si può procedere nel caso in cui si debba calcolare la distanza fra una retta r ed un piano α. Anche in questo caso o $r \nparallel \alpha$ e $d(r, \alpha) = 0$ oppure $r \parallel \alpha$ e $d(r, \alpha) = d(P_0, \alpha)$ per un qualsiasi punto $P_0 \in \alpha$. Quindi, in questo secondo caso, si può applicare la formula (11.2.1).

11.4 Distanza fra due rette

Concludiamo la lezione analizzando l'ultimo caso rimanente, cioè il caso in cui X ed Y siano due rette nello spazio, diciamo r ed r'. Di nuovo, supponiamo di aver fissato sistema di riferimento $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$ nello spazio S_3.

Dobbiamo distinguere due casi principali: il caso in cui r ed r' siano complanari e quello siano rette sghembe

Il primo caso si divide a sua volta in due sottocasi: o le rette sono incidenti in un punto, quindi $r \cap r' \neq \emptyset$ e $d(r, r') = 0$, oppure sono parallele, cioè $r \parallel r'$ e dunque $d(r, r') = d(P_0, r')$ per un qualsiasi punto $P_0 \in r$, come nella Figura 11.6 qui sotto.

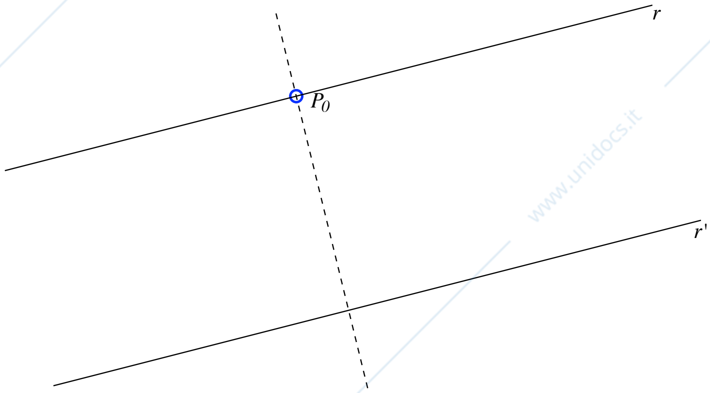

Figura 11.6

Esempio 11.7. Sia fissato un sistema riferimento $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$ in S_3 e si considerino la retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t - 2 \\ z = 2t - 3, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

la retta r' di equazioni cartesiane

$$r' : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

e il piano α di equazione $3x + y - 2z = 0$.

Il vettore $\vec{v}_r = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ è parallelo alla retta r, mentre il vettore $\vec{v}_\alpha = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ è perpendicolare al piano α. Poiché $\langle \vec{v}_r, \vec{v}_\alpha \rangle = 0$ segue che $r \parallel \alpha$. Pertanto, preso $P_0 = (3, -2, -3) \in r$, dalla formula (11.2.1) si ha

$$d(r, \alpha) = d(P_0, \alpha) = \frac{13}{\sqrt{14}}.$$

Prendiamo adesso in considerazione la retta r': un vettore parallelo ad essa è

$$\vec{v}_{r'} = (\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}) \times (\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k} = \vec{v}_r,$$

quindi $r' \parallel r$ e, dunque, $r' \parallel \alpha$. Per calcolare $d(r', \alpha)$ possiamo procedere in due modi: possiamo determinare un punto $P_0 \in r'$, per esempio $P_0 = (5, 0, 1)$ e poi calcolare $d(r', \alpha) = d(P_0, \alpha)$. Oppure possiamo osservare che il piano α' di equazione $3x + y - 2z - 13 = 2(x + y - z - 4) + (x - y - 5) = 0$ contiene r' ed è parallelo a α: perciò

$$d(r', \alpha) = d(\alpha', \alpha) = \frac{|9 - 2 + 6|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{13}{\sqrt{14}}.$$

♠

Esempio 11.8. In S_3 sia fissato sistema di riferimento $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$ e si considerino le due rette r ed r' rispettivamente di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t - 2 \\ z = 2t - 3, \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + t' \\ z = 3 + 2t', \end{cases}$$

al variare di $t, t' \in \mathbb{R}$. Le due rette sono entrambe parallele al vettore $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, quindi sono parallele fra loro. Poiché $P_0 = (1, 2, 3) \in r'$ segue dall'Esempio 11.5 che

$$d(r, r') = d(r, P_0) = \sqrt{\frac{70}{3}}.$$

♠

Il secondo caso è chiaramente più interessante, e va analizzato in dettaglio: supponiamo quindi che le due rette r e r' siano sghembe, con vettori direzione $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_{r'}$ rispettivamente.

Osserviamo che esiste un unico piano α contenente r e parallelo a r'. Infatti poiché $r \nparallel r'$, segue che $\vec{v}_r \nparallel \vec{v}_{r'}$, sicché il vettore $\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_{r'}$ è non nullo. Ogni piano contenente r e parallelo ad r' deve essere parallelo sia a $\vec{v}_r$ che a $\vec{v}_{r'}$, quindi deve essere perpendicolare a $\vec{w}$: dovendo intersecare r, tale piano è univocamente determinato.

In modo simile si dimostra l'esistenza e l'unicità di un piano α' contenente r' e parallelo a r.

Per definizione, la retta $r \subseteq \alpha$ e la retta $r' \subseteq \alpha'$, quindi vale la disuguaglianza

$$d(\alpha, \alpha') \leqslant d(r, r'). \tag{11.4.1}$$

La situazione è illustrata nella Figura 11.7.

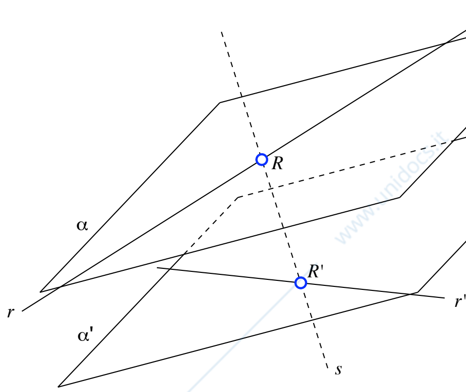

Figura 11.7

Dimostreremo che in realtà nella formula (11.4.1) vale l'uguaglianza, e quindi che il calcolo della distanza $d(r, r')$ si riduce al più semplice calcolo della distanza fra i due piani paralleli α e α'.

Proposizione 11.9 (**Esistenza e unicità della retta di minima distanza**). *Date r ed r' due rette sghembe in S_3, esiste un'unica retta s incidente e perpendicolare sia a r che ad r'. La retta s viene detta* retta di minima distanza fra r ed r', *poiché i punti R ed R' dove essa interseca rispettivamente le rette r ed r' soddisfano la condizione $d(r, r') = d(R, R') = d(\alpha, \alpha')$.*

Dimostrazione. Se la retta s dell'enunciato esiste, essa è parallela al vettore $\vec{w}$, quindi ortogonale sia ad α che ad α'. In particolare quindi essa deve essere contenuta nel piano β' contenente r' e perpendicolare ad α' (e quindi perpendicolare al vettore $\vec{v}_{r'} \times \vec{v}_{\alpha'}$).

Similmente la retta s è anche contenuta nel piano β passante per r e perpendicolare ad α (quindi perpendicolare a $\vec{v}_r \times \vec{v}_\alpha$).

I piani β e β' non sono paralleli (perché?) quindi si intersecano in una retta che, perciò, deve coincidere con s: questo ci dice che se s esiste è unica e ci fornisce anche un modo per costruirla.

Siano adesso $R = s \cap r$ ed $R' = s \cap r'$: osserviamo che R' è la proiezione ortogonale di R su α', quindi

$$d(\alpha, \alpha') = d(R, R') = d(R, r') \geqslant d(r, r') \geqslant d(\alpha, \alpha').$$

La catena di disuguaglianze è quindi in realtà una catena di uguaglianze, dimostrando la tesi.

Si noti che anche in questo caso l'estremo inferiore che definisce la distanza $d(r, r')$ è, quindi, un minimo. □

Esempio 11.10. In S_3 sia fissato sistema di riferimento $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$ e si considerino le rette r ed r' rispettivamente di equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t - 2 \\ z = 2t - 3, \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = -t' \\ y = t' - 2 \\ z = 2t' + 1, \end{cases}$$

al variare di $t, t' \in \mathbb{R}$.

La retta r è parallela al vettore $\vec{v}_r = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, mentre la retta r' è parallela la vettore $\vec{v}_{r'} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, quindi $r \not\parallel r'$. Inoltre il sistema

$$\begin{cases} 3 + t = -t' \\ t - 2 = t' - 2 \\ 2t - 3 = 2t' + 1, \end{cases}$$

non ha soluzione. Concludiamo che r ed r' sono sghembe.

Vogliamo calcolare la distanza $d(r, r')$: cerchiamo quindi i due piani paralleli α ed α'. Essi sono entrambi ortogonali al vettore

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_{r'} = -2\vec{\jmath} + \vec{k},$$

quindi hanno equazione

$$\alpha : -2y + z = d, \qquad \alpha' : -2y + z = d'.$$

Imponendo il passaggio di α per un punto di r, ad esempio $(1, 0, 1)$, troviamo $d = 1$; similmente, imponendo il passaggio di α' per un punto di r', ad esempio $(-1, -1, 3)$, troviamo $d' = 5$.

La distanza tra le due rette è dunque

$$d(r, r') = d(\alpha, \alpha') = \frac{|1 - 5|}{\sqrt{0 + 4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Osserviamo che un'altra possibilità per calcolare la distanza tra due rette sghembe è quella di determinare esplicitamente i punti $R \in r$ ed $R' \in r'$ della Proposizione 11.9: per fare ciò dobbiamo imporre che valga sia $R - R' \perp \vec{v}_r$ sia $R - R' \perp \vec{v}_{r'}$. Abbiamo

$$R - R' = (3 + t + t')\vec{\imath} + (t - t')\vec{\jmath} + (2t - 2t' - 4)\vec{k},$$

dunque le due condizioni di perpendicolarità si traducono nel sistema

$$\begin{cases} 6t - 4t' = 5 \\ 4t - 6t' = 11, \end{cases}$$

la cui unica soluzione è data da $t = -7/10$ e $t' = -23/10$ corrispondente ai due punti

$$R = \left(\frac{23}{10}, -\frac{27}{10}, -\frac{44}{10} \right), \qquad R' = \left(\frac{23}{10}, -\frac{43}{10}, -\frac{36}{10} \right).$$

Segue che
$$d(r, r') = d(R, R') = \frac{\sqrt{0 + 256 + 64}}{10} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Per completezza, osserviamo che la retta s di minima distanza fra r ed r', che è la retta passante per R e R', ha equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = 23/10 \\ y = -27/10 - 16t \qquad\qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = -44/10 + 8t, \end{cases}$$
♠

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari