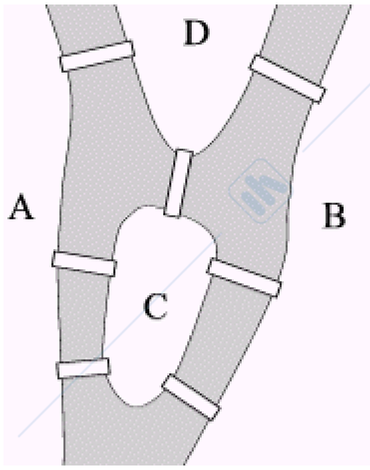
1. Problemi classici che coinvolgono i grafi

I PONTI DI KOENIGSBERG

La bella cittadina tedesca di Koenigsberg si trova alla confluenza di due fiumi, comprende un isolotto ed è divisa in quattro parti, corrispondenti alle quattro regioni di terra che si venivano a formare (fig. 1): le due sponde A e B , l'isolotto C e la parte di terra D che si trova tra i due fiumi prima della confluenza. In città c'erano i sette ponti indicati in figura. I cittadini di Koenigsberg sottoposero al famoso matematico Leonhard Euler (Eulero) un problema che non erano riusciti a risolvere: tracciare un percorso che, partendo da una qualsiasi delle quattro zone della città, attraversava tutti i sette ponti, una ed una sola volta, ritornando alla fine al punto di partenza.

Figura 1



Eulero associò al problema la rappresentazione schematica di fig.2: ciascuna della quattro zone della città è rappresentata da un cerchio, e ciascun ponte da una linea. Questa rappresentazione del problema è una struttura matematica ben definita, e prende il nome di grafo. Nel lavoro *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* del 1736, (dove appare per la prima volta il termine grafo) Eulero dimostrò che il problema non aveva soluzioni. Mostreremo in seguito come ragionò.

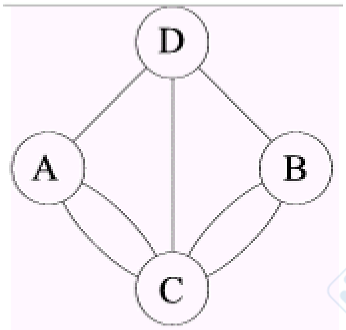
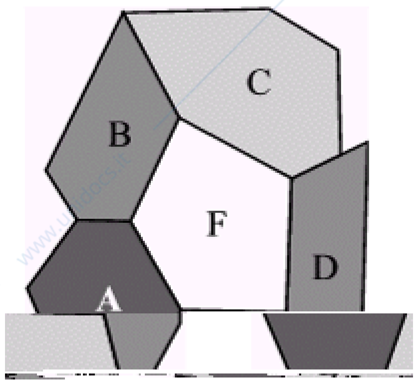


Figura 2

IL PROBLEMA DEI QUATTRO COLORI

Un altro problema che coinvolge il modello "grafo" è il famoso problema dei quattro colori. Si tratta di determinare il numero di colori strettamente necessari per colorare le regioni di una qualsiasi carta geografica in modo tale che due regioni adiacenti abbiano colori diversi. Un esempio di regioni-colorazioni è in fig.3.



Una rappresentazione del problema può essere fornita associando un cerchio ad ogni regione della mappa e collegando con una linea due cerchi corrispondenti a due regioni adiacenti (fig. 4). Come pei i ponti di Koenigsberg, anche questa rappresentazione trascura aspetti non essenziali come, per esempio, l'estensione delle regioni, la forma dei loro confini, ecc., e mette in evidenza esclusivamente gli aspetti utili a risolvere il problema.La struttura utilizzata in questa rappresentazione è la stessa dell'esempio precedente: anch'essa è un grafo. Anche su questo problema torneremo in seguito.

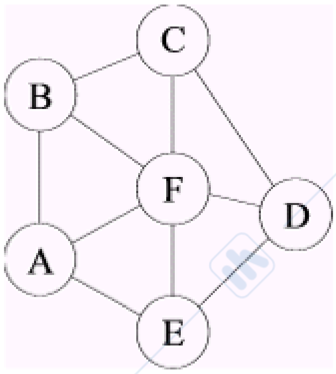


Figura 4

I quattro esempi "storici" proposti mettono in evidenza come problemi molto diversi tra loro possono essere modellati mediante la stessa struttura matematica: il grafo.
I grafi rappresentano uno strumento essenziale per la risoluzione di una ricca varietà di problemi provenienti da applicazioni reali.
Tra le altre applicazioni:

IL PROBLEMA DEL COMMESSO VIAGGIATORE	Dato un insieme di città, qual è il percorso più breve che le attraversa tutte una sola volta ?
IL PROBLEMA DELLE TRE CASE E DELLE TRE FORNITURE	Si possono collegare tre case a tre fornitori senza che strade-tubature-cavi che le connettono si incrocino ? Qual è il numero minimo di incroci che si devono fare ?

Nella tabella seguente alcuni esempi di situazioni problematiche concrete che possono ricnodnotte ai problemi classici:

problema	applicazioni reali
I PONTI DI KOENIGSBERG	Problemi di trasporto. Per esempio, stabilire la rotta di un veicolo postale in modo da distribuire la posta in maniera efficiente: Chinese Postman's Problem. Problemi di ispezione e manutenzione di sistemi distribuiti: reti elettriche, telefoniche, stradali.
I QUATTRO COLORI	Testi di circuiti elettronici stampati, allocazione di variabili e registri della CPU, assegnazione di frequenze radio-televisive
IL COMMESSO VIAGGIATORE	Determinare i flussi delle merci tra i magazzini dei fornitori e dei distributori, determinare il percorso più breve che connette due città
LE TRE CASE E LE TRE FORNITURE	Layout di reti elettriche, telefoniche, idriche; connettere nella maniera più efficiente un insieme di calcolatori in una rete telematica