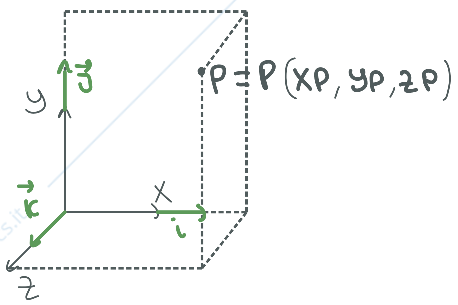
CINEMATICA del PUNTO

come descrivere la posizione di un punto P nello spazio?

↓

introduciamo un sistema di riferimento **cartesiano**



disegniamo proiezioni punto P sui 3 assi

per semplificare esprimiamo P attraverso vettori → definiamo **versori dei 3 assi** ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) e un **vettore posizione**:

$$\vec{P} = x_P \vec{i} + y_P \vec{j} + z_P \vec{k}$$

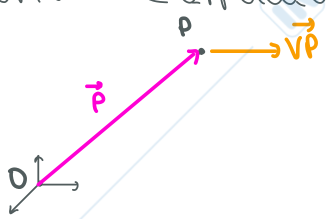
se il punto si sposta nel tempo la posizione del punto P sarà **in funzione del tempo**:

$$\vec{P}(t) = x_P(t)\vec{i} + y_P(t)\vec{j} + z_P(t)\vec{k}$$

VELOCITÀ: $\vec{v}_P = \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \dfrac{dx_P}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy_P}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz_P}{dt}\vec{k} = \dot{x}_P\vec{i} + \dot{y}_P\vec{j} + \dot{z}_P\vec{k}$

derivata della posizione di P

la velocità è un vettore applicato al punto di cui voglio calcolare la velocità



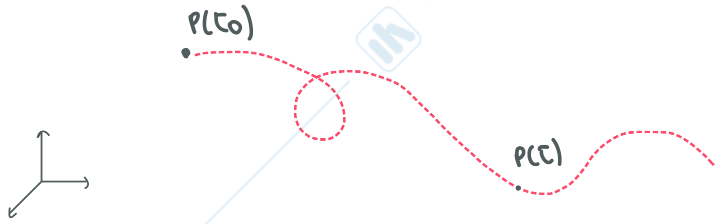
$\vec{v}_P$ è un **vettore**, lo posso caratterizzare in 2 modi:

a) tramite le sue componenti $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$

b) tramite modulo, direzione, verso

modulo: $v_P = |\vec{v}_P| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ (lunghezza vettore velocità)

direzione: → introduco altre 2 entità geometriche → **traiettoria** → **ascissa curvilinea**



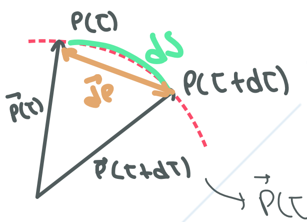
traiettoria: luogo dei punti occupati da P nel tempo → è la curva disegnata

ascissa curvilinea: lunghezza della traiettoria percorsa (della curva) tra un certo tempo iniziale t_0 fino al tempo t

Per calcolare la lunghezza della curva:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v_P \, dt$$ (**legge oraria**)

Come si ricava? prendiamo un infinitesimo di traiettoria:



in un infinitesimo di tempo dt avrò percorso un infinitesimo di traiettoria ds

→ $\vec{P}(t+dt) = \vec{P}(t) + \vec{dP}$

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$$

$$\vec{dP} = \underbrace{dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}}_{\text{vettore di componenti infinitesime}} \qquad |\vec{dP}| = dP = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

se dt è infinitesimo ⟶ $|\vec{dP}| = ds$ (arco di curva coincide con segmento) $= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} =$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dx = \dot{x}\,dt$

$= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt = v_P \cdot dt$

$ds = v_P\,dt$ → integro **$s(t) - \cancel{s(t_0)} = \int_{t_0}^{t} v_P\,dt$**

torniamo a studiare $\vec{v}_P$:

sappiamo che $\underbrace{\vec{P}=\vec{P}(t) \quad e \quad s=s(t)}$

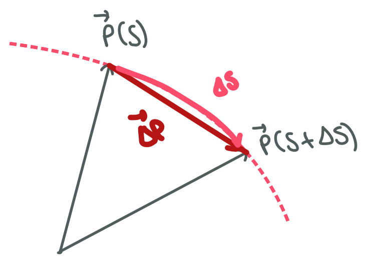
posizione di un punto e spazio percorso sono in funzione del tempo

le combino insieme → posizione del punto sarà in funzione dello spazio percorso (ascissa curvilinea) che a sua volta è in funzione del tempo

$\vec{P}=\vec{P}(s(t))$

ricavo $\vec{v}_P$ come: $\vec{v}_P = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{P}(s(t))\right) = \frac{d\vec{P}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v_P \cdot \underbrace{\left(\frac{d\vec{P}}{ds}\right)}_{\text{versore della velocità}}$

$ds = v_P\,dt$ quindi $\frac{ds}{dt}=v_P$



analizzo $\frac{d\vec{P}}{ds}$:

$$\frac{d\vec{P}}{ds} = \lim_{\Delta s\to0}\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta s} = \frac{\vec{P}(s+\Delta s)-\vec{P}(s)}{\Delta s}$$

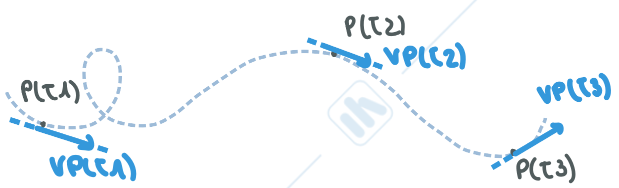
se $\Delta s\to0$ (punti $P(s)$ e $P(s+\Delta s)$ tendono a coincidere) → $|\Delta\vec{P}|=\Delta s$ $\quad \underbrace{\left|\frac{d\vec{P}}{ds}\right|}_{\text{modulo di } \frac{d\vec{P}}{ds}} = \lim_{\Delta s\to0}\frac{|\Delta\vec{P}|}{\Delta s}=1$

↓

$\frac{d\vec{P}}{ds}$ è **tangente alla traiettoria**

$\frac{d\vec{P}}{ds}$ è chiamato **versore tangente** ($\vec{t}$)

quindi:



sappiamo che $\vec{v}_P = v_P\vec{t}$ (vettore velocità del punto è sempre uguale al suo modulo per il versore tangente)

velocità cambia direzione nel tempo → $\vec{v}_P(t)=v_P(t)\,\vec{t}(t)$ (modulo rimane uguale, versore tangente cambia direzione)

↓

$\vec{v}_P(t)=\dot{x}(t)\vec{i}+\dot{y}(t)\vec{j}+\dot{z}(t)\vec{k}$

(qui versori restano invariati → sono versori degli assi cartesiani)

ACCELERAZIONE (di un punto P):

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt}$$

con componenti cartesiane → $\vec{a}_P = \ddot{x}_P(t)\vec{i} + \ddot{y}_P(t)\vec{j} + \ddot{z}_P(t)\vec{k}$

con ascissa curvilinea → $\vec{a}_P = \frac{d}{dt}(v_P \vec{T}) = \underbrace{\frac{dv_P}{dt}\vec{T} + v_P \frac{d\vec{T}}{dt}}_{\text{derivata del prodotto}} = \dot{v}_P \vec{T} + v_P \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} =$

versore tangente

v_P

$$= \dot{v}_P \vec{T} + v_P^2 \left(\frac{d\vec{T}}{ds}\right)$$

↳ non la conosco

considerazioni aggiuntive:

$\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$ (sono vettori paralleli → il loro prodotto = prodotto tra i moduli) = **costante nel tempo** e **per ogni s** (ascissa curvilinea)

↑ prodotto scalare

$$\frac{d}{ds}(\vec{T}\cdot\vec{T}) = 0 \longrightarrow \frac{d\vec{T}}{ds}\cdot\vec{T} + \vec{T}\cdot\frac{d\vec{T}}{ds} = \cancel{2}\frac{d\vec{T}}{ds}\cdot\vec{T} = 0$$

↓

se il prodotto scalare tra 2 vettori è nullo, i vettori sono **ortogonali tra di loro**. quindi avremo che $\frac{d\vec{T}}{ds}$ e $\vec{T}$ sono ortogonali tra di loro

definisco $\frac{d\vec{T}}{ds} = k\vec{N}$ dove **$\vec{N}$ = versore normale a $\vec{T}$** e **k = curvatura** (modulo di $\frac{d\vec{T}}{ds}$)

$$\vec{N} = \frac{\text{vettore}}{\text{modulo del vettore}} = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|} = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{k}$$

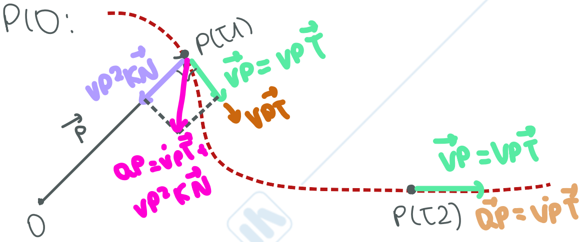
allora: $\vec{a}_P = \dot{v}_P\vec{T} + v_P^2 \frac{d\vec{T}}{ds} = \dot{v}_P\vec{T} + v_P^2 k\vec{N}$ ⟶ ci sono **2 componenti del vettore accelerazione**

ACCELERAZIONE TANGENZIALE $\dot{v}_P\vec{T}$ (presente solo se modulo della velocità varia nel tempo)

ACCELERAZIONE NORMALE: $v_P^2 k\vec{N}$ (presente solo se la velocità cambia direzione nel tempo)

infatti, se $\frac{d\vec{T}}{ds} = 0$ ($\vec{T}$ = cost)
→ $k\vec{N} = \vec{0}$

ad esempio:



in P(t1), istante per istante varia la **direzione della velocità** → avrò sicuramente la componente **normale** dell'accelerazione, che sarà **perpendicolare alla velocità!** Posso avere anche la componente tangenziale, **parallela alla velocità!** e tangente alla traiettoria

accelerazione totale di P(t1) data dalla **somma vettoriale delle due**

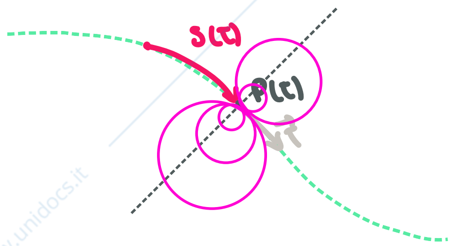
in P(t2) il punto P si muove su una **retta orizzontale** → velocità **non cambia direzione** unica componente possibile dell'accelerazione di P(t2) è quella **tangenziale**

RIASSUNENDO:

$$\vec{v}_P = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v_P\vec{t}$$

$$\vec{a}_P = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = \dot{v}_P\vec{t} + v_P^2 \underbrace{k\vec{N}}_{\frac{d\vec{t}}{ds}}$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA: CERCHIO OSCULATORE

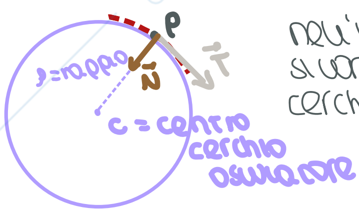


disegno retta passante per P e perpendicolare a versore tangente.
questi cerchi le sono tangenti alla traiettoria in quel punto!

Tutti questi cerchi hanno il centro sulla normale alla tangente.

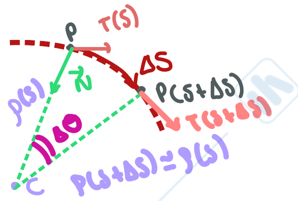
tra tutti questi cerchi tangenti alla traiettoria, ce n'è **solo uno tangente** e che ha **la stessa curvatura della traiettoria**. tale cerchio è detto **cerchio osculatore.**

facciamo uno zoom:



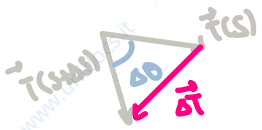
nell'intorno di P la traiettoria si confonde con un arco del cerchio osculatore

$\vec{N}$ (versore normale) = perpendicolare al versore tangente con il verso che punta al centro del cerchio osculatore



tratto infinitesimo approssimabile a un arco di circonferenza
↳ distanza di P(s+Δs) da centro sempre ρ(s)

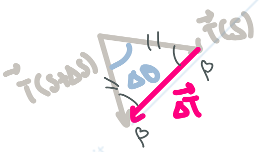
vettore tangente T(s+Δs) sarà ruotato rispetto a prima di un angolo Δθ



$\vec{T}(s+\Delta s) = \vec{T}(s) + \vec{\Delta T}$
↳ vettore che sommato a $\vec{T}(s)$ mi da $\vec{T}(s+\Delta s)$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{T}(s+\Delta s) - \vec{T}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta s}$$

ma $|\vec{T}(s)| = |\vec{T}(s+\Delta s)| = 1$ perché sono sempre versori tangenti
se hanno i moduli uguali, il disegno a sinistra è un **triangolo isoscele angoli alla base uguali**



Posso calcolare $\Delta \vec{T}$ (base triangolo isoscele)

$|\Delta \vec{T}| = 2|1| \cdot \sin\frac{\Delta\theta}{2} \simeq 2|1| \cdot \frac{\Delta\theta}{2} \approx \Delta\theta$ (**modulo**)

per angoli molto piccoli $\sin\alpha \simeq \alpha$

per conoscere la direzione so che
somma angoli interni $= \pi$ ⟶ $2\beta + \Delta\theta = \pi$ ⟶ $\beta = \frac{\pi}{2}$ perché θ molto piccolo

↓

$\Delta\vec{T}$ è normale a $\vec{T}$

perché $|\Delta\vec{T}| = \Delta\theta$, $\vec{N}$ mi dice che è normale a $\vec{T}$

allora avrò che $\frac{d\vec{T}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta \vec{N}}{\rho \Delta\theta} = \frac{\vec{N}}{\rho}$

↳ perché Δs arco di circ = raggio · angolo

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{N} \rightarrow \text{versore}$$

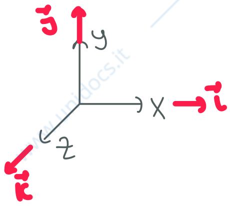
modulo dove ρ = raggio di curvatura

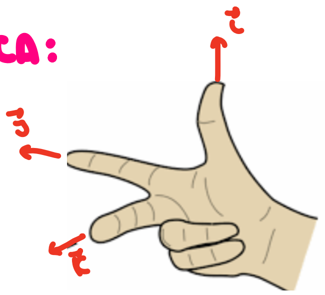
la curvatura $K = \frac{1}{\rho}$

$$\vec{a}_P = \dot{v}_P \vec{T} + \frac{v_P^2}{\rho}\vec{N}$$

(più il raggio di curvatura è piccolo, più l'accelerazione è elevata a parità di velocità)

TERNA INTRINSECA:





terna destrorsa

Prodotto scalare:

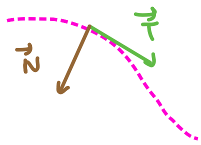
$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1$; $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$; $\vec{i}\cdot\vec{k} = 0$

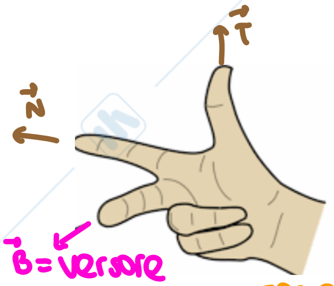
Prodotto vettoriale:

$\vec{i}\wedge\vec{j} = \vec{k}$ $\quad \vec{j}\wedge\vec{i} = -\vec{k}$ $\quad \underbrace{\vec{i}\wedge\vec{i} = 0}_{\text{perché sono paralleli}}$

$\vec{j}\wedge\vec{k} = \vec{i}$

$\vec{k}\wedge\vec{i} = \vec{j}$





$\vec{B}$ = versore binormale

terna intrinseca (terna di versori che cambia lungo la traiettoria)

$$\vec{B} = \vec{T}\wedge\vec{N}$$

CALCOLO DEL RAGGIO DI CURVATURA:

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{\rho}\vec{N} \qquad \vec{v} = v\vec{T}$$

supponiamo che sia nota l'accelerazione di un vettore:

moltiplico vettorialmente a destra e sinistra per il **vettore velocità**:

$$\vec{a}\wedge\vec{v} = \dot{v}\vec{T}\wedge\vec{v} + \frac{v^2}{\rho}\vec{N}\wedge\vec{v} \qquad \text{sostituisco a } \vec{v} = v\vec{T}$$

$$\vec{a}\wedge\vec{v} = \underbrace{\cancel{\dot{v}\vec{T}\wedge v\vec{T}}}_{\text{perché no prodotto vettoriale di 2 vettori paralleli (diretti lungo } \vec{T})} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\vec{N}\wedge v\vec{T}}_{\frac{v^3}{\rho}\vec{N}\wedge\vec{T}}$$

$\vec{N}\wedge\vec{T} = -\vec{B}$ per terna intrinseca

$$\vec a \wedge \vec v = \frac{v^3}{\rho}(-\vec B)$$

Prendo il modulo: $|\vec a \wedge \vec v| = \frac{v^3}{\rho}$ ($\vec B$ indica solo direzione) → $\boxed{\frac{1}{\rho} = k = \frac{|\vec a \wedge \vec v|}{v^3}}$

ad esempio: $\vec v = \dot x \vec i + \dot y \vec j \qquad v = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}$

$\vec a = \ddot x \vec i + \ddot y \vec j$

$\vec i \wedge \vec i = 0$ $\quad \vec k$

quanto vale ρ? $\vec a \wedge \vec v = (\dot x \vec i + \dot y \vec j) \wedge (\ddot x \vec i + \ddot y \vec j) = \cancel{(\dot x \ddot x)\vec i \wedge \vec i} + (\dot x \ddot y)\vec i \wedge \vec j +$

$+ (\dot y \ddot x)\vec j \wedge \vec i + \cancel{(\dot y \ddot y)\vec j \wedge \vec j} = (\dot x \ddot y - \dot y \ddot x)\vec k$

$-\vec k \qquad \vec j \wedge \vec j = 0$

$$|\vec a \wedge \vec v| = |\dot x \ddot y - \dot y \ddot x|$$

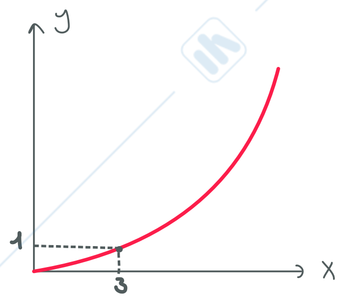
$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\vec a \wedge \vec v|}{v^3} = \frac{|\dot x \ddot y - \dot y \ddot x|}{\left(\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}\right)^3}$$

esempi: conosco la traiettoria $\vec P(t) = 3t\vec i + 1t^2 \vec j$

calcolare:
- traiettoria $(y(x))$
- $\vec v, \vec T$ al tempo $t = 1s$
- $\vec a, \vec \rho, \vec N$

I^a $x(t) = 3t$

II^a $y(t) = 1t^2$



dalla I^a equazione mi ricavo tempo, poi lo metto nella II^a

$t = \frac{x}{3}$ dalla I^a → $\boxed{y = \frac{x^2}{9}}$ equazione traiettoria

derivata di $x = 3t$

$\vec v = \dot x \vec i + \dot y \vec j = 3\vec i + 2t\vec j$

derivata di $y = t^2$

a $t = 1$ → $\vec v = 3\vec i + 2\vec j$ $\qquad |v| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ a $t = 1$

$\vec v = \sqrt{13}\left(\frac{3\vec i}{\sqrt{13}} + \frac{2\vec j}{\sqrt{13}}\right) \qquad \vec T = \frac{\vec v}{v} = \frac{3\vec i}{\sqrt{13}} + \frac{2\vec j}{\sqrt{13}}$

$\vec a = \ddot x \vec i + \ddot y \vec j = 2\vec j \qquad \begin{cases} \ddot x = 0 \\ \ddot y = 2 \end{cases}$

$\vec a = \dot v \vec T + \frac{v^2}{\rho}\vec N$

so che $2\vec{j} = \dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{\rho}\vec{N}$ posso moltiplicare scalarmente solo per $\vec{T}$ sapendo che $\vec{T}\cdot\vec{T}=1$ e che $\vec{T}\cdot\vec{N}=0$

$$2\vec{j}\cdot\vec{T} = \dot{v} = 2\vec{j}\cdot\underbrace{\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}\right)}_{\substack{\vec{j}\cdot\vec{i}=0\\ \vec{j}\cdot\vec{j}=1}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

prodotto vettoriale $\vec{j}\wedge\vec{j}=0$, $\vec{j}\wedge\vec{i}=-1$

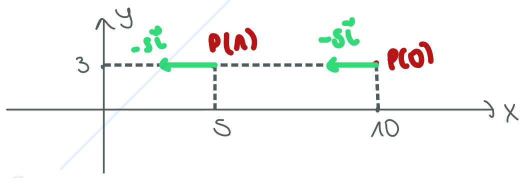
$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{a}\wedge\vec{v}|}{v^3} = \frac{|2\vec{j}\wedge(3\vec{i}+2\vec{j})|}{(\sqrt{13})^3} = \frac{|-6|}{(\sqrt{13})^3} = 0{,}128 \qquad \rho = \frac{1}{0{,}128} = 7{,}8\,m$$

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{\rho}\vec{N} \qquad \vec{N} = \frac{\vec{a}-\dot{v}\vec{T}}{\frac{v^2}{\rho}} = \frac{-2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}$$

(**verifichiamo che $\vec{T}\cdot\vec{N}=0$**)

esempio 2: moto rettilineo uniforme

$\vec{P}(t) = (10-5t)\vec{i} + 3\vec{j}$



$\vec{v} = -5\vec{i}$ = costante

$v = 5$

$\vec{v} = v\vec{T} = \underbrace{5\vec{T} = -5\vec{i}}_{\vec{T}=-\vec{i}}$

$\vec{a} = 0 \quad (\ddot{x}, \ddot{y} = 0)$

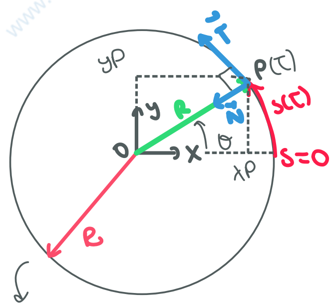
$\vec{a} = \cancel{\dot{v}\vec{T}} + \cancel{\frac{v^2}{\rho}\vec{N}}$

$\dot{v} = 0$ perché $v = 5 =$ cost

$\rho \to \infty$ raggio di curvatura infinito perché traiettoria rettilinea

retta = circonferenza con $\rho \to \infty$

esempio 3: moto circolare uniforme



traiettoria cerchio $\rho = R$

Fisso nel centro del cerchio il sistema di riferimento

$\dot{s}$ = costante (moto uniforme)

$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = v$

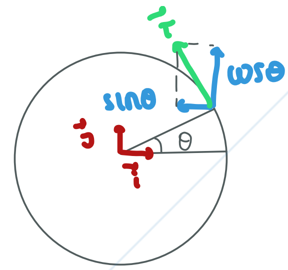
$s = R\cdot\theta \longrightarrow v = \dot{s} = R\dot{\theta}$

$\vec{P} = x_P\vec{i} + y_P\vec{j} = (R\cos\theta)\vec{i} + (R\sin\theta)\vec{j}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = (-R\sin\theta\,\vec{i} + R\cos\theta\,\vec{j})\cdot\dot{\theta} =$

$= (\underset{\dot{x}}{-R\dot{\theta}\sin\theta})\vec{i} + (\underset{\dot{y}}{R\dot{\theta}\cos\theta})\vec{j}$

quindi: $\begin{cases} \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{T} \\ \vec{v} = R\dot{\theta}(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\vec{T} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

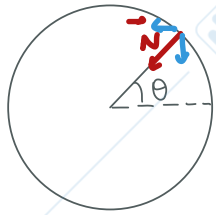


$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} = \dot{v}\,\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$

$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\dot{\theta})}{dt} = R\ddot{\theta}$ $\longrightarrow$ $\vec{a} = R\ddot{\theta}\,\vec{T} + R\dot{\theta}^2\,\vec{N}$

$\frac{v^2}{R} = \frac{(R\dot{\theta})^2}{R} = R\dot{\theta}^2$

$\vec{N} = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}$



nel caso di moto uniforme: $\begin{cases} \dot{s} = R\dot{\theta} = cost \quad \ddot{\theta} = 0 \\ \vec{a} = R\dot{\theta}^2\vec{N} \end{cases}$ (quindi solo componente accelerazione diretta verso il centro con lo stesso modulo)