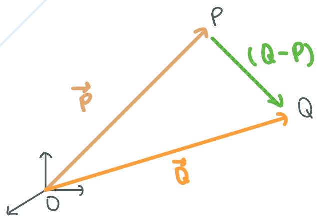
NOTAZIONE VETTORIALE

$\vec{P} = (P-O) = (\vec{P}-\vec{O})$
$\vec{Q} = (Q-O) = (\vec{Q}-\vec{O})$

$\vec{Q} = \vec{P} + \underbrace{(\vec{Q}-\vec{P})}_{(Q-P)}$

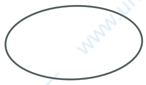


CORPO RIGIDO

Punto •

(dimensione trascurabile)

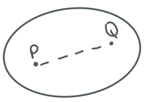
corpo



(dimensioni non trascurabili)

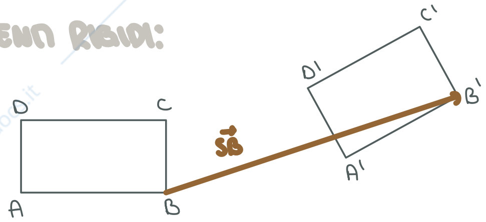
→ rigido
→ deformabile

VINCOLO DI RIGIDITA'



la distanza tra 2 generici punti del corpo rimane **invariata** durante il moto → corpo rigido

SPOSTAMENTI RIGIDI:



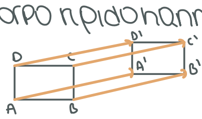
configurazione finale

configurazione iniziale

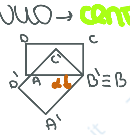
spostamento di B: $\vec{SB} = (\vec{B'}-\vec{B})$

nel caso piano, sono presenti **3 tipi di spostamento rigido** →

TRASLAZIONE: tutti i punti del corpo rigido hanno stesso spostamento



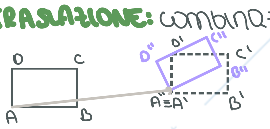
ROTAZIONE: esiste un solo punto del corpo rigido che ha spostamento nullo → **centro di rotazione**



α = angolo di rotazione
SB = 0 → B centro di rotazione

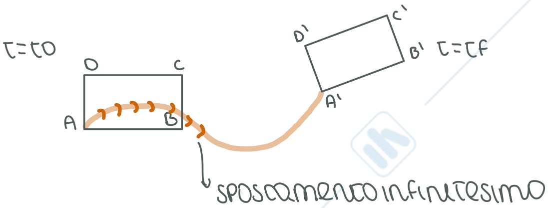
↓

ROTOTRASLAZIONE: combinazione di 1 e 2

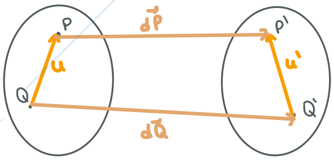


traslazione + rotazione di α con centro A'

SPOSTAMENTI INFINITESIMI



che relazione ci deve essere tra gli spostamenti infinitesimi dei vari punti del corpo rigido?

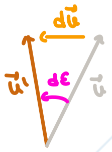


$u=(P-Q)=(\vec{P}-\vec{Q})$
$u'=(P'-Q')=(\vec{P}'-\vec{Q}')$

$\vec{P}'=\vec{P}+d\vec{P}$, $\vec{Q}'=\vec{Q}+d\vec{Q}$

$\vec{u}'=(\vec{P}'-\vec{Q}')=\underbrace{(\vec{P}-\vec{Q})}_{\vec{u}}+\underbrace{(d\vec{P}-d\vec{Q})}_{d\vec{u}} \longrightarrow \vec{u}'=\vec{u}+d\vec{u}$

siccome il corpo è rigido

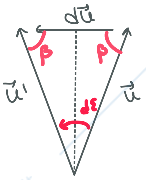


$|\vec{u}|=|\vec{u}'|$ per vincolo rigidità

$\downarrow$

$d\vec{u}$ rappresenta una **rotazione**

esprimiamo $d\vec{u}$ in funzione di $d\varepsilon$



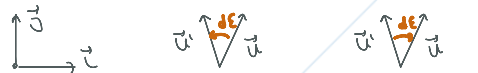
modulo di $d\vec{u}$: $du=2u\sin\frac{d\varepsilon}{2}\approx \cancel{2}u\frac{d\varepsilon}{\cancel{2}}=u\,d\varepsilon$

direzione: $d\varepsilon+2\beta=\pi \longrightarrow \beta=\frac{\pi}{2}-\cancel{\frac{d\varepsilon}{2}} \longrightarrow d\vec{u}\perp\vec{u}\longrightarrow d\vec{u}\cdot\vec{u}=0$
infinitesimo

verso: dipende dal senso di rotazione di $d\varepsilon$ (orario o antiorario)

definisco il **vettore rotazione infinitesima $d\vec{\varepsilon}$**

modulo $|d\vec{\varepsilon}|=d\varepsilon$
direzione di $d\varepsilon$: normale al piano in cui avviene rotazione
verso: regola del cavatappi



$d\vec{\varepsilon}=d\varepsilon\vec{k}$ $\qquad$ $d\vec{\varepsilon}=d\varepsilon(-\vec{k})$

avendo introdotto $d\vec{\varepsilon}$, posso definire $d\vec{u}$ mediante un prodotto vettoriale

$$d\vec{u} = d\vec{\varepsilon} \wedge \vec{u}$$

verifichiamo le proprietà:

modulo: $du = |d\vec{\varepsilon} \wedge \vec{u}| = d\varepsilon\, u \left(\sin \frac{\pi}{2}\right) = d\varepsilon\, u$ ✓

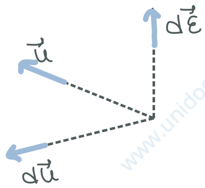
ortogonale al piano

nel piano

direzione: perpendicolare a $\vec{u}$

$d\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ $\quad (d\vec{\varepsilon} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$ $\quad (\cancel{\vec{u} \wedge \vec{u}}) \cdot d\vec{\varepsilon} = 0$ ✓

verso: uso regola mano destra

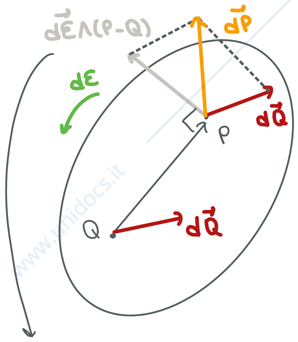


$d\vec{u} = d\vec{\varepsilon} \wedge \vec{u}$

quindi: $d\vec{u} = (d\vec{P} - d\vec{Q}) = d\vec{\varepsilon} \wedge \vec{u} = d\vec{\varepsilon} \wedge (P-Q)$

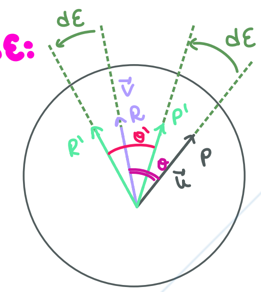
$$d\vec{P} - d\vec{Q} = d\vec{\varepsilon} \wedge (P-Q)$$

$$\underbrace{d\vec{P} = d\vec{Q}}_{\text{traslazione}} + \underbrace{d\vec{\varepsilon} \wedge (P-Q)}_{\text{rotazio}}$$ **TEOREMA RIVALS PER SPOSTAMENTI INFINITESIMI**



vettore normale sia a $(P-Q)$ sia a $d\varepsilon$ (normale a piano rotazione $\longrightarrow$ diretto come $\vec{k}$ o $-\vec{k}$

NOTA SU $d\varepsilon$:



θ = costante (angolo tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$)

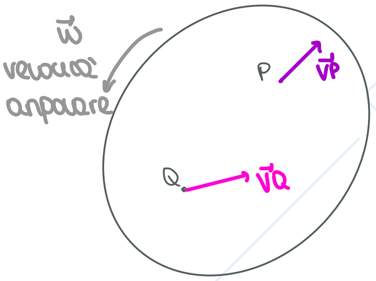
$\theta' = \theta$

↳ angolo tra u' e v'

la rotazione infinitesima $d\varepsilon$ è **unica per tutto il corpo rigido**

ATTO di MOTO

: il campo di velocità di un corpo rigido in un certo istante di tempo



$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{P}}{dt} \rightsquigarrow d\vec{P} = \vec{v}_P\,dt$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} \rightsquigarrow d\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}\,dt$$

$d\vec{\varepsilon}$: vettore rotazione infinitesima

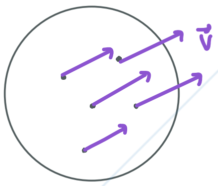
$$d\vec{P} = d\vec{Q} + d\vec{\varepsilon} \wedge (P-Q)$$

$$\vec{v}_P \cancel{dt} = \vec{v}_Q \cancel{dt} + \vec{\omega} \cancel{dt} \wedge (P-Q)$$

$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge (P-Q)$ **rivals per le velocità di due punti** che **appartengono allo stesso corpo rigido**

CASI PARTICOLARI di ATTO di MOTO

1) traslatorio: tutti i punti hanno la stessa velocità v

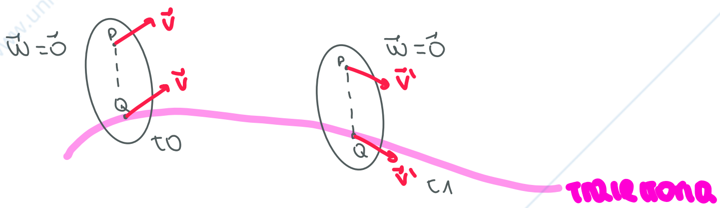


la velocità angolare ω è nulla

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \cancel{\vec{\omega} \wedge (P-Q)} = \vec{v}$$

$\omega = 0$

nota bene: non confondere con traiettoria



se tutti gli atti di moto sono traslatori $\longrightarrow$ moto è traslatorio

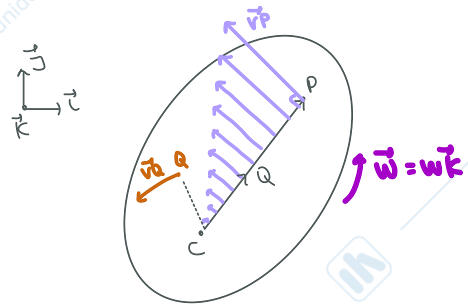
2) rotatorio: un punto ha velocità nulla: $\vec{v}_C = \vec{0} \longleftrightarrow$ **C: centro istantaneo rotazione**

applico rivals rispetto a C:

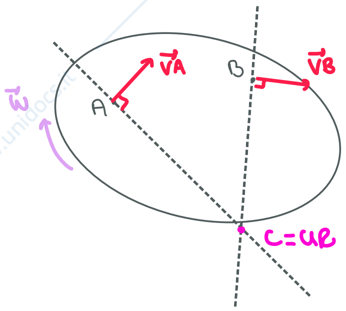
$$\vec{v}_P = \cancel{\vec{v}_C} + \vec{\omega} \wedge (P-C) \longrightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P-C)$$

$\vec{v}_C = 0$

$$v_P = |\vec{v}_P| = \omega |P-C|$$



TEOREMA di CHASLES: trovo il CIR, noti la $\vec{v}$ in 2 punti



$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (A-C)$

$\vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge (B-C)$

N.B. il CIR può non essere un punto materiale del CR

metodo analitico:

$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (A-C)$
$\vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge (B-C)$
$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B-A)$

note $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$
incognite: $\vec{\omega}$, posizione del CIR $(A-C)$ o $(B-C)$

$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

calcolo $\vec{\omega}$: $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (B-A)$

$(B-A) \wedge \Delta\vec{v} = (B-A) \wedge (\vec{\omega} \wedge (B-A)) =$

$= \vec{\omega}|B-A|^2 - (B-A)\,(\underbrace{\cancel{(B-A) \cdot \vec{\omega}}}_{=0 \text{ (sono } \perp)}) = \vec{\omega}|B-A|^2$

$$\vec{\omega} = \frac{(B-A) \wedge \Delta\vec{v}}{|B-A|^2}$$

trovo il CIR: $\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (A-C) = \underbrace{-(A-C) \wedge \vec{\omega}}_{\text{inverto prodotto vettoriale} \rightarrow \text{metto segno} \ominus} = (C-A) \wedge \vec{\omega}$

$(C-A) \wedge \vec{\omega} = \vec{v}_A$
$\vec{\omega} \wedge ((C-A) \wedge \vec{\omega}) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_A$
$(C-A)\,\omega^2 = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_A$

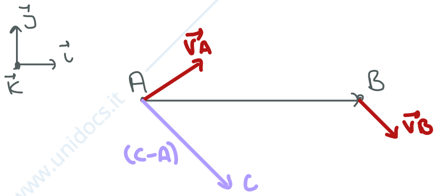
$$(C-A) = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2}$$

esempio:

$(B-A) = 8\vec{i}$
$\vec{v}_A = 3\vec{i} + 1\vec{j}$
$\vec{v}_B = 3\vec{i} - 3\vec{j}$

$$\vec{\omega} = \frac{(B-A)\wedge(\vec{v}_B - \vec{v}_A)}{|B-A|^2} = \frac{8\vec{i}\wedge(-4\vec{j})}{64} = \frac{-32\vec{k}}{64} = -0{,}5\vec{k}$$

$$(C-A) = \frac{\vec{\omega}\wedge\vec{v}_A}{\omega^2} = \frac{-0{,}5\vec{k}\wedge(3\vec{i}+1\vec{j})}{0{,}25} = \frac{-1{,}5\vec{j} - 0{,}5(-\vec{i})}{0{,}25} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$$



ACCELERAZIONI: $\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega}\wedge(P-Q)$

$\downarrow d/dt$

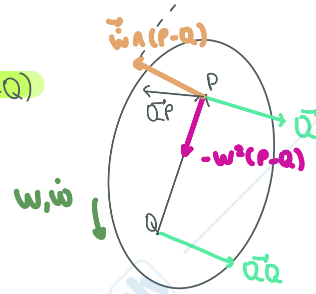
$\begin{cases} \vec{a}_P = \dfrac{d\vec{v}_P}{dt} \\ \dot{\vec{\omega}} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \end{cases}$ accelerazione angolare

$$\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}}\wedge(P-Q) + \vec{\omega}\wedge\underbrace{(\vec{v}_P - \vec{v}_Q)}_{\vec{\omega}\wedge(P-Q)}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}}\wedge(P-Q) + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge(P-Q))$$ **rivals per accelerazioni**

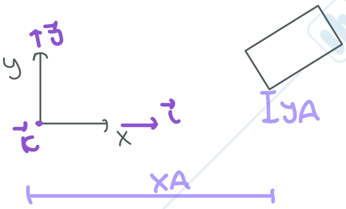
nel piano: $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$
$(P-Q) = x\vec{i} + y\vec{j}$
$\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge(P-Q)) = -\omega^2(P-Q)$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}}\wedge(P-Q) - \omega^2(P-Q)$$



GRADI di LIBERTÀ di un CORPO RIGIDO

Quante informazioni servono per determinare la posizione di un corpo rigido nel piano?

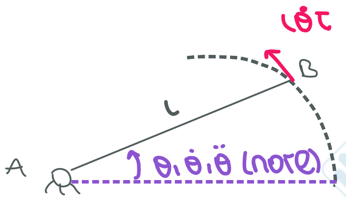


3 info: $\underbrace{X_A, Y_A, \theta}_{\text{numero minimo}}$

numero GdL

Nello spazio → 6 info: posizioni x, y, z + 3 angoli

VINCOLO CINEMATICO: oggetto che va a imporre il valore di 1 o più gradi di libertà di un corpo rigido



calcolare $\vec v_B, \vec a_B$

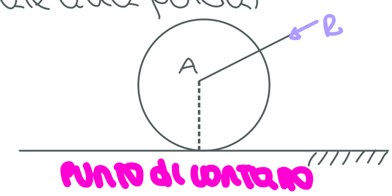
in A ho cerniera $\begin{cases} X_A = cost \rightarrow \dot x_A = 0 \rightarrow \ddot x_A = 0 \\ Y_A = cost \rightarrow \dot y_B = 0 \rightarrow \ddot y_A = 0 \end{cases}$

A ≡ CIR (non lo scrivo perché avrò sempre v=0)

$$\vec v_B = \cancel{\vec v_A} + \vec\omega \wedge (B-A) = \dot\theta \vec k \wedge (l\cos\theta \vec i + l\sin\theta \vec j) = l\dot\theta(\cos\theta \vec j - \sin\theta \vec i) = v\vec\tau = l\dot\theta\vec\tau$$

VINCOLO di PURO ROTOLAMENTO

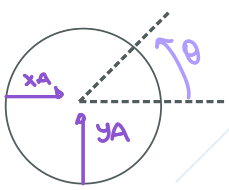
mentre disco ruota su guida, $\vec v_C = 0$ (rispetto a un sistema di riferimento solidale alla guida)



guida

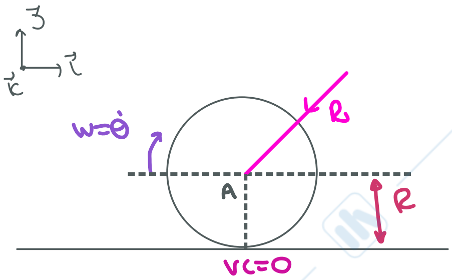
$\vec v_C = 0 \begin{cases} \dot x_C = 0 \\ \dot y_C = 0 \end{cases}$ 2 vincoli cinematici → 1 GdL

(rispetto a S.R. solidale alla guida)



Vincolo di puro rotolamento: $\vec v_C = 0$

XA, YA, θ non indipendenti (devo trovare legami cinematici)

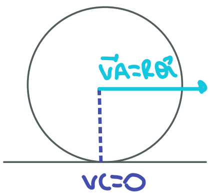


traiettoria di A

puro rotolamento orizzontale

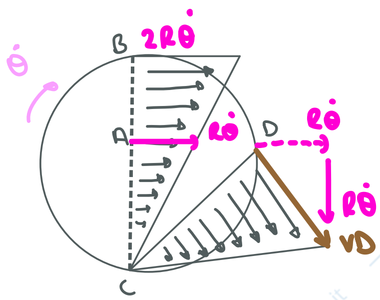
$\vec{V}_A$ con Rivals: $\vec{V}_C + \underbrace{\vec{\omega}}_{\dot\theta(-\vec{k})} \wedge \underbrace{(A-C)}_{R\vec{j}} = R\dot\theta\vec{i}$

$\vec{V}_A = \dot{x}_A\vec{i} + \dot{y}_A\vec{j} = R\dot\theta\vec{i}$



LEGAMI CINEMATICI IN VELOCITÀ

$\begin{cases}\dot{x}_A = R\dot\theta \\ \dot{y}_A = 0\end{cases} \xrightarrow{\text{integro}} \begin{cases}x_A = R\theta + \text{cost} \\ y_A = 0\end{cases}$



DISTRIBUZIONE di VELOCITÀ

$\vec{V}_C = 0$

$\vec{V}_B = -\dot\theta\vec{k}\wedge 2R\vec{j} = 2R\dot\theta\vec{i}$

va in senso orario

$\vec{V}_D = -\dot\theta\vec{k}\wedge\underbrace{(D-C)}_{\sqrt{2}R(\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j})} = -\dot\theta\vec{k}\wedge(R\vec{i}+R\vec{j}) = -R\dot\theta\vec{j} + R\dot\theta\vec{i}$

DISTRIBUZIONE di ACCELERAZIONE

nota: vincolo di puro rotolamento impone $\vec{V}_C = 0$, ma $\vec{a}_C \neq 0$!!!

in questo caso conosco accelerazione del centro del disco A

infatti: $\begin{cases}\dot{x}_A = R\dot\theta \\ \dot{y}_A = 0 \text{ costante}\end{cases} \xrightarrow{d/dt} \begin{cases}\ddot{x}_A = R\ddot\theta \\ \ddot{y}_A = 0\end{cases}$

quindi $v_A = R\dot\theta\vec{i}$, $\dot{\vec{v}}_A = R\ddot\theta\vec{i} = \vec{a}_A$ (traiettoria di A rettilinea)

$$\vec{a}_A = \dot{v}_A \vec{t} + \cancel{\frac{v_A^2}{\rho}\vec{n}} = R\ddot{\theta}\vec{i}$$

non c'è componente normale essendo retta linea ($\rho \Rightarrow \infty$)

posso calcolare le accelerazioni degli altri punti usando Rivals

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (C-A) - \omega^2 (C-A) = R\ddot{\theta}\vec{i} - \ddot{\theta}\vec{k} \wedge (-R\vec{j}) - \dot{\theta}^2 \vec{k}(-R\vec{j}) =$$

versoC

$$= \cancel{R\ddot{\theta}\vec{i}} - \cancel{R\ddot{\theta}\vec{i}} + R\dot{\theta}^2\vec{j} = R\dot{\theta}^2\vec{j}$$

solo componente centripeta

(se $\ddot{\theta} = 0 \to \omega = \text{cost}$ ho solo accelerazione centripeta)