VIBRAZIONI

La vibrazione è un moto oscillatorio, ci occuperemo Di vibrazioni meccaniche ovvero quelle che si realizzano nei solidi o nei sistemi di corpi. Le Vibrazioni nei sistemi meccanici sono generalmente dannose, Perché generano sollecitazioni dinamiche che causano il fenomeno della fatica, che riduce la resistenza del materiale e accorcia la vita utile del sistema meccanico. esistono macchine in cui le vibrazioni vengono generate appositamente per facilitare un processo tecnologico o di trasporto. le vibrazioni meccaniche sono regolate dallo scambio tra energia cinetica ed energia potenziale all'interno del sistema, con l'intervento di fenomeni dissipativi che determinano lo smorzamento delle oscillazioni. affinché un solido o un sistema di corpi possa compiere una moto vibratorio, è necessario che esso presenti una possibilità di deformazione elastica. questo viene fatto introducendo elementi di tipo molla e smorzatore concentrati per rendere conto delle deformabilità elastiche e dei fenomeni dissipativi.

La vibrazione consiste generalmente in piccoli movimenti oscillatori che possono Avvenire nell'intorno di uno stato di quiete oppure nell'intorno di uno stato di moto. fintanto che le vibrazioni sono di piccola ampiezza, possono solitamente essere descritte mediante equazioni lineari. quando invece Le Vibrazioni raggiungono ampiezze elevate Il comportamento del sistema può diventare non lineare e piccole variazioni delle condizioni di funzionamento possono modificare completamente il movimento del sistema.

- le vibrazioni sono dette libere quando avvengono in assenza di forzanti, sono invece dette forzate quelle che avvengono per effetto dell'azione di forzanti tempo varianti applicate al sistema.

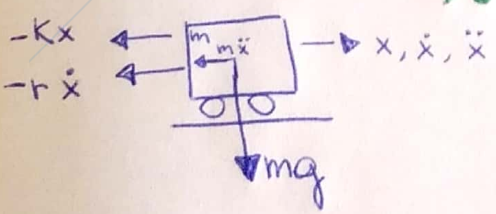
per effetto dell'azione di un campo di forze dipendente dalla posizione o dalla velocità del sistema, le vibrazioni possono divenire auto eccitate, ossia assumere un andamento espansivo che determina ampiezze di vibrazione che aumentano nel tempo.

LE EQUAZIONI DI MOTO DI UN SISTEMA VIBRANTE

limiteremo la nostra analisi a sistemi ad un solo grado di libertà, pertanto scriveremo per ogni caso studiato una sola equazione di moto, che prende la forma di un'equazione differenziale di secondo ordine. Avendo limitato l'analisi ai piccoli movimenti del sistema, l'equazione differenziale risulterà lineare.

$$m\ddot{x} + rx + Kx = F_{est}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \underbrace{\frac{\partial E_c}{\partial x}}_{\to 0} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q_x$$



MOTO LIBERO NON SMORZATO

- Non ho forzante esterna
- Non ho dissipazione

⇒ Per avere vibrazioni si modificano le condizioni iniziali (PENDOLO)

Equazione: ~~...~~ $m\ddot{x} + kx = 0$

$$\begin{cases} x = x_0 e^{\lambda t} \\ \dot{x} = \lambda x_0 e^{\lambda t} \\ \ddot{x} = x_0 \lambda^2 e^{\lambda t} \end{cases} \quad (m\lambda^2 + k)\underbrace{x_0 e^{\lambda t}}_{>0 \text{ sempre}} = 0$$

Eq. verificata se

$x_0 = 0 \Rightarrow x = 0$ sistema fermo

$m\lambda^2 + k = 0$ EQUAZIONE CARATTERISTICA

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$$

ω → pulsazione propria del sistema non smorzato [rad/s]

$$x = x_{01} e^{i\omega t} + x_{02} e^{-i\omega t}$$

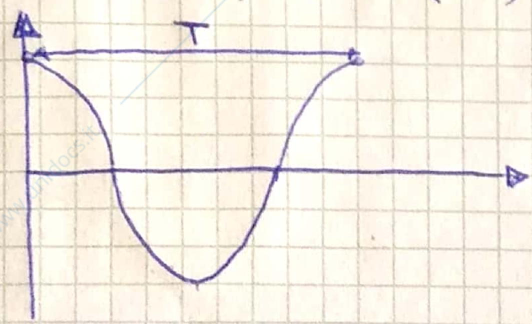
$$x = x_{01}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + x_{02}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))$$

$$= (x_{01} + x_{02})\cos(\omega t) + i(x_{01} - x_{02})\sin(\omega t)$$

~~Scrivendo ...~~

complex e coniug $\begin{cases} x_{01} = \frac{A}{2} + i\frac{B}{2} \\ x_{02} = \frac{A}{2} - i\frac{B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{01} + x_{02} = A \\ x_{01} - x_{02} = -iB \end{matrix}$

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

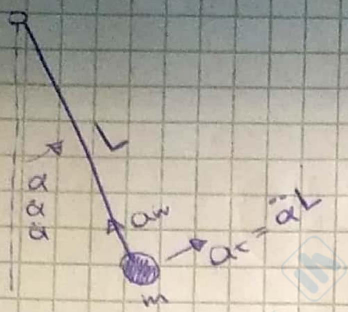


$$\begin{cases} C^2 = A^2 + B^2 \\ \varphi = -\arctan\left(\frac{B}{A}\right) \end{cases}$$

$x = C\cos(\omega t + \varphi)$ → funzione armonica

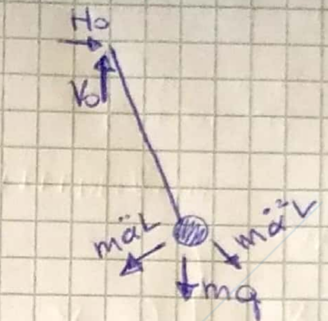
$\varphi = \omega \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$

CASO PENDOLO (piccole oscillazioni)



$a_n = \dot{\alpha}^2 L$

Metodo (1)
EQUILIBRIO DINAMICO



$\Sigma M_O = 0$ la forza centrifuga non ci dà momento

$\circlearrowleft +$ $\quad m\ddot{\alpha}L^2 + mgL\sin\alpha = 0$

$\sin\alpha \approx \alpha$

$$\underbrace{m}_{m_{eq}}\ddot{\alpha}L^2 + \underbrace{mg\,L}_{k_{eq}}\alpha$$

Metodo (2)
Lagrange

$E_c = \frac{1}{2} m (\dot{\alpha} L)^2 = \frac{1}{2} m \dot{\alpha}^2 L^2$

$V = mgh = mgL(1 - \cos\alpha)$

$d\mathcal{L} = 0$

$\frac{dE_c}{d\dot{\alpha}} = mL^2\dot{\alpha}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dE_c}{d\dot{\alpha}}\right) = mL^2\ddot{\alpha}$

$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left(mgL(1-\cos\alpha)\right) = mgL\sin\alpha$

$mL^2\ddot{\alpha} + mgL\sin\alpha = 0$

$\sin\alpha \approx \alpha$

$mL^2\ddot{\alpha} + mgL\alpha = 0$

MOTO LIBERO CON SMORZAMENTO ($F_{ex} = 0$)

$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 e^{\lambda t} \\ \dot{x} = x_0 \lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{x} = x_0 \lambda^2 e^{\lambda t} \end{array}\right\} (m\lambda^2 + r\lambda + k) x_0 \cancel{e^{\lambda t}} = 0$$

costante $\neq 0$

- $x_0 = 0$ non è il nostro caso
- $m\lambda^2 + \lambda r + k = 0 \Rightarrow$ polinomio caratteristico

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

introduciamo 2 parametri

$h = \dfrac{r}{r_c}$ $\quad r_c = 2m\omega$ $\qquad \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

coef. di smorzamento adimensionale

$$\lambda_{1,2} = -h\omega \pm \sqrt{h^2\omega^2 - \omega^2} = \omega\left(-h \pm \sqrt{h^2 - 1}\right)$$

Le λ possono essere parametri reali o complessi coniugati

Ⓐ $0 < h < 1 \Rightarrow \sqrt{\ } < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2}$ complex coniug $\Rightarrow$ SUBCRITICO

Ⓑ $h = 1 \Rightarrow \sqrt{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$ CRITICO

Ⓒ $h > 1 \Rightarrow \sqrt{\ } > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2}$ reali $\Rightarrow$ IPERCRITICO

Ⓐ SUBCRITICO

pulsazione propria sistema smorzato

$$\lambda_{1,2} = -h\omega \pm \omega\sqrt{h^2 - 1} = \underbrace{-h\omega}_{-\alpha} \pm \omega i \sqrt{1 - h^2} = -\alpha \pm i\boxed{\omega_d}$$

$$x = x_{01} e^{\lambda_1 t} + x_{02} e^{\lambda_2 t} = x_{01} e^{(-\alpha + i\omega_d)t} + x_{02} e^{(-\alpha - i\omega_d)t}$$

$$x = x_{01} e^{-\alpha t} e^{i\omega_d t} + x_{02} e^{-\alpha t} e^{-i\omega_d t}$$

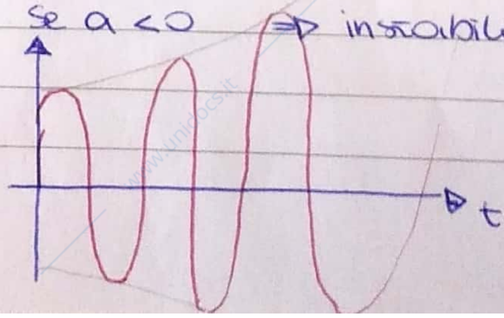
$$x = e^{-\alpha t}\left[x_{01} e^{i\omega_d t} + x_{02} e^{-i\omega_d t}\right] = e^{-\alpha t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]$$

- è molto importante che $\alpha > 0$ ($Re < 0$) in quanto esso determina il diminuire o l'aumentare delle oscillazioni
- se λ hanno parte immaginaria allora il sistema oscilla

Essendoci un esponenziale negativo che moltiplica il moto perpetuo, ciò fa crescere le vibrazioni.

Se $\alpha > 0$

Se $\alpha < 0 \Rightarrow$ instabilità



Scanned by CamScanner

(C) IPERCRITICA $(r>r_c)$

$$\lambda_{1,2} = -h\omega \pm \omega\sqrt{h^2-1}$$

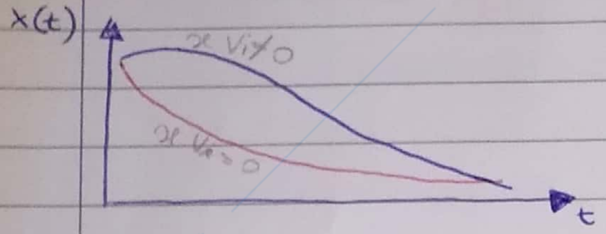
$$\lambda_1 = -h\omega + \omega\sqrt{h^2-1} = -\alpha_1$$

$$\lambda_2 = -h\omega - \omega\sqrt{h^2-1} = -\alpha_2$$

numeri Reali <0 NO instabilità

non ho oscillazioni perchè non ho parte immaginaria

$$X = x_{01}e^{-\alpha_1 t} + x_{02}e^{-\alpha_2 t}$$



La differenza che c'è tra il comportamento subcritico e quello IPERCRITICO è che il secondo ha comportamento NON oscillatorio, essendo λ reale

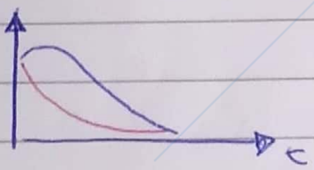
---

(B) CRITICO $(r=r_c)$

$$\lambda_{12} = -h\omega \pm \omega\underbrace{\sqrt{h^2-1}}_{=0} = -h\omega = -\alpha$$

$$X = x_{01}e^{-\alpha t} + x_{02}e^{-\alpha t}$$

molto simile a ipercritico, ma critico torno in quiete più velocemente



MOTO FORZATO

MOTO NON LIBERO (F_{ext})

$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$

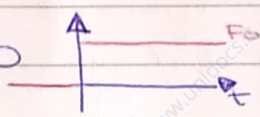
Per trovare di questa eq. differen. non omogenea $x(t)$ sarà somma di due parti

$$x(t) = \underbrace{x_g(t)}_{\text{integrale generale}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{integrale particolare}}$$

$x_g(t) \Rightarrow$ soluzione dell'omogeneo associato $\underbrace{m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0}_{\text{calcolato prima}}$
(SIGNIF. FISICO: rappresenta il transitorio)

$x_p(t) \Rightarrow$ dipende dalla forzante (SIGNIF. FISICO $\rightarrow$ rappresenta condizioni di REGIME)

① FORZANTE A GRADINO



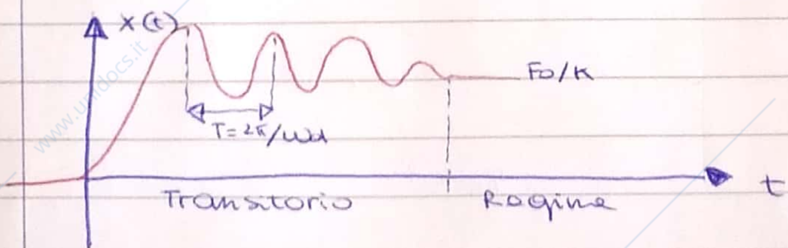
$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F_0 & t \geq 0 \end{cases}$

$x_p(t) = x_0 \rightarrow kx_0 = F_0 \qquad x_0 = \frac{F_0}{k}$

$$x(t) = e^{-\alpha t}[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] + \frac{F_0}{k}$$

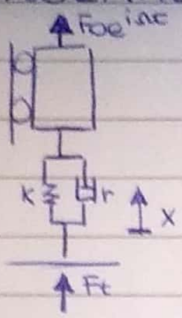
$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ \dot{x}(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} A &= -F_0/k \\ B &= (-F_0/k)h \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \left(h\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\right)e^{-\alpha t}\right]$$



studio soluzioni per minimizzare la trasmissione delle vibrazioni

ISOLAMENTO delle VIBRAZIONI



F_t forza trasmessa a terra dalla fondazione

$F_t = kx + r\dot{x} = (k + i\Omega r) x_0 e^{i\Omega t}$

$x(t) = x_0 e^{i\Omega t}$

$$x_0 = \frac{F_0}{-m\Omega^2 + i\Omega r + k}$$

$$F_t = \frac{k + i\Omega r}{-m\Omega^2 + i\Omega r + k} F_0 e^{i\Omega t}$$

Introduciamo

$a = \frac{\Omega}{\omega}$ PULSAZIONE ADIMENSIONALE

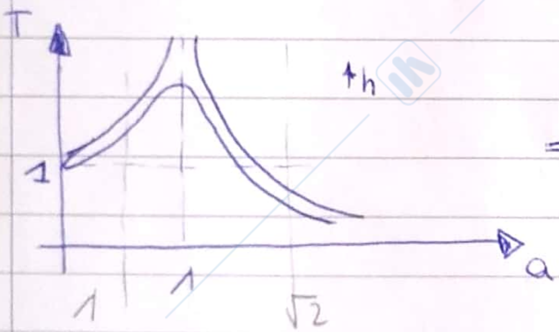
$h = \frac{r}{r_c} = \frac{r}{2m\omega}$

$\omega = \sqrt{k/m}$

$T = \left|\frac{F_t}{F_0}\right| = \left|\frac{k + i\Omega r}{-m\Omega^2 + i\Omega r + k}\right|$

trasmissibilità

$$T = \frac{\sqrt{1 + 4\Omega^2 h^2}}{\sqrt{(1-\Omega^2) + 4a^2h^2}}$$ trasmissibilità



$\Rightarrow$

OSS.

1. $a \ll 1$ $T \cong 1$ $\Rightarrow F_t = F_0$
2. $a \approx 1$ $T \uparrow$ controllata tramite h
3. $a > \sqrt{2}$ $T \leq 1$ $\begin{cases} T\downarrow & a\uparrow \\ T\uparrow & h\uparrow \end{cases}$

FONDAZIONI
- $a < 0{,}5$ $(\Omega < 0{,}5\,\omega) \Rightarrow$ Fondazioni rigide $\Rightarrow$ caso 1
- $a > \sqrt{2}$ $(\Omega > \sqrt{2}\,\omega) \Rightarrow$ FONDAZIONI SOSPESE $(F_t \ll F_0)$

OSS. FONDAZIONI SOSPESE

1. Per realizzare questa condizione $\rightarrow$ $m\uparrow$, $k\downarrow$
2. $h\downarrow$ Attenzione alla transizione (zone di risonanza) $\rightarrow$ AVVIO e arresto macchina
   Associato ad un accumulo di energia che fa crescere ampiezza vibra.

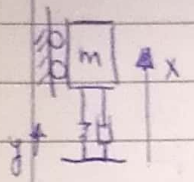
Scanned by CamScanner

spostamento del punto di collegamento del sistema

Es. • irregolarità strade
• moti sismici

FORZAMENTO DOVUTO A SPOSTAMENTO di VINCOLO

(modello a 1+1 gdl)



$$\begin{cases} y(t) = y_0 e^{i\Omega t} \\ m\ddot{x} + k(x-y) + r(\dot{x} - \dot{y}) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = ky + r\dot{y}}$$ ⇒ EQ. di moto del sistema

NOTAZIONE COMPLESSA

$y = y_0 e^{i\Omega t}$ $\quad x = x_0 e^{i\Omega t}$

$$x_0 = \frac{k + i\Omega r}{-m\Omega^2 + \Omega r + k} y_0 \qquad \left|\frac{x_0}{y_0}\right| = \left|\frac{k + i\Omega r}{-m\Omega^2 + i\Omega r + k}\right|$$

↳ Funzion di trasmissibilità

CENNI STABILITA' SISTEMI MECCANICHE