

# Meccanica Applicata: Teoria

Sophie Cavallini

11 febbraio 2021

# Indice

<b>1</b>	<b>Dinamica</b>	<b>2</b>
1.1	Principio di D'Alembert	2
1.1.1	Applicazione a un corpo rigido	2
1.1.2	Coppia risultante delle forze d'inerzia (infinitesima)	3
1.1.3	Equazioni cardinali della dinamica di un corpo rigido	3
1.1.4	Sistemi di corpi rigidi	4
1.2	Principio dei lavori virtuali	4
1.3	Bilancio di potenze	4
1.4	Teorema dell'energia cinetica	5
1.5	Equazione di Lagrange	5
1.6	Forze conservative	6
1.6.1	Forza elastica	6
1.6.2	Foza gravitazionale	7
1.6.3	Forze dissipative di tipo viscoso	7
<b>2</b>	<b>Vibrazioni</b>	<b>8</b>
2.1	Vibrazioni di sistema a 1 GdL	8
2.1.1	Vibrazioni del sistema: moto libero non smorzato	8
2.1.2	Vibrazioni del sistema: moto libero con smorzamento	9
2.1.3	Sistemi vibranti con forzamento	9
2.1.4	Risposta di un sistema a 1 GdL in condizioni di risonanza senza smorazamento	12
2.1.5	Pendolo	13
2.1.6	Sistema libero con smorzamento per attrito radente	13
2.1.7	Sistema forzato con smorzamento dovuto ad attrito radente	15
2.1.8	Sistemi vibranti a 1 GdL con smorzamento per attrito radente	16
2.2	Sistemi vibranti a 2-n GdL	17
2.2.1	Esempio	19
2.2.2	Passaggio in coordinate cartesiane	20

# Capitolo 1

## Dinamica

### 1.1 Principio di D'Alembert

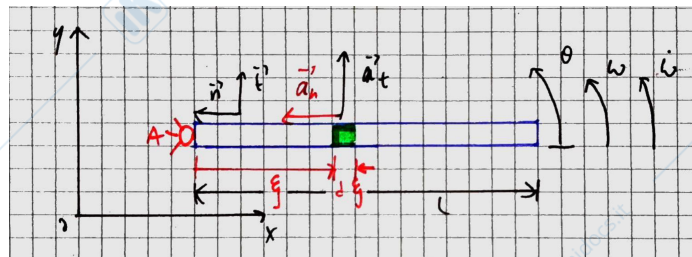
Dal II principio della dinamica si ha che per un punto

$$\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} \quad (1.1)$$

In questa forma non è un'equazione di equilibrio perchè il termine a destra è diverso da 0.  $\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a}$  definisco questo prodotto come **forza d'inerzia**. (1.1) diventa  $\sum_i \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{in} = 0$  ed è un'equazione di equilibrio.

#### 1.1.1 Applicazione a un corpo rigido

Sistema equivalente delle forze d'inerzia (una forza e una coppia per corpo rigido). Ad esempio una trave incernierata in un punto (A) (che si muove di moto rotatorio).



Dati:

- Trave omogenea  $\implies dm = \frac{d\xi}{L}m$ , dove  $dm$  è la massa dell'elemento  $d\xi$ ,  $m$  massa totale,  $L$  lunghezza della trave
- $\theta, \omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}, \dot{\omega} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$

Per definizione di forza d'inerzia, la forza d'inerzia dell'elemento  $d\xi$  è:

$$d\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a} \implies \text{Devo determinare } \mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$$

$$\mathbf{a}_t(\xi) = \xi\ddot{\theta}\mathbf{t} \quad \text{Componente tangente dell'accelerazione} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{a}_n(\xi) = \xi\dot{\theta}^2\mathbf{n} \quad \text{Componente normale dell'accelerazione} \quad (1.3)$$

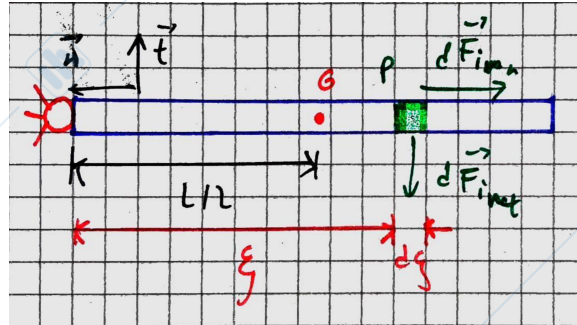
Dalla 1.2 si ottiene  $d\mathbf{F}_{in_t}(\xi) = -\mathbf{a}_t(\xi) = -m\frac{d\xi}{L}\xi\ddot{\theta}\mathbf{t}$ , e dalla 1.3  $d\mathbf{F}_{in_n}(\xi) = -dm\mathbf{a}_n(\xi) = -m\frac{d\xi}{L}\xi\dot{\theta}^2\mathbf{n}$ . Sono le componenti infinitesime della forza d'inerzia.

$$\mathbf{F}_{in_t} = \int_0^L d\mathbf{F}_{in_t}(\xi) = -\frac{m\ddot{\theta}}{L} \int_0^L \xi d\xi \mathbf{t} = -m\frac{L}{2}\ddot{\theta}\mathbf{t}$$

$$\mathbf{F}_{in_n} = \int_0^L d\mathbf{F}_{in_n}(\xi) = -\frac{m\dot{\theta}^2}{L} \int_0^L \xi d\xi \mathbf{n} = -m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\mathbf{n}$$

Dove  $\frac{L}{2}\ddot{\theta}\mathbf{t}$  e  $\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\mathbf{n}$  sono le componenti dell'accelerazione di un punto posto a  $\frac{L}{2}$  nella trave (baricentro). Quindi  $\mathbf{F}_{in_t} = -m\mathbf{a}_{G_t}$ ,  $\mathbf{F}_{in_n} = -m\mathbf{a}_{G_n}$ , cioè  $\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a}_G$ . La risultante delle forze d'inerzia di tutto il corpo rigido è pari all'accelerazione del baricentro per la massa del corpo rigido e verso opposto all'accelerazione.

### 1.1.2 Coppia risultante delle forze d'inerzia (infinitesima)



Il momento delle  $d\mathbf{F}_{in}$  rispetto al baricentro G:

$$\mathbf{C}_{in} = \int_0^L (\mathbf{P} - \mathbf{G}) \wedge d\mathbf{F}_{in} = \int_0^L (\mathbf{P} - \mathbf{G}) \wedge \mathbf{F}_{in_t} = -\frac{m}{L}\ddot{\theta} \int_0^L \xi(\xi - \frac{L}{2})d\xi\mathbf{k} = -\ddot{\theta}m\frac{L^2}{12}\mathbf{k} = -J_G\ddot{\theta}\mathbf{k}$$

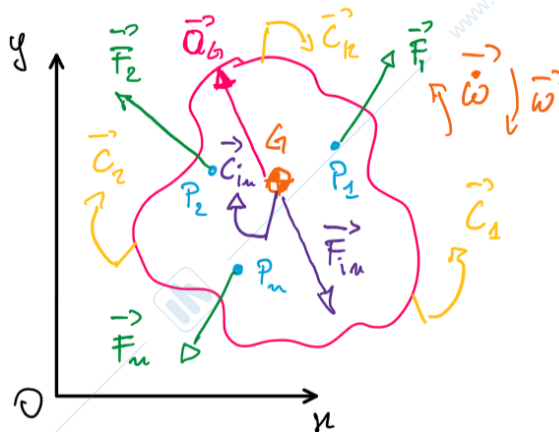
Dove  $J_G = m\frac{L^2}{12}$  è il **Momento di inerzia barcentrico della trave**.

La risultante delle coppie d'inerzia è pari ad una coppia data dal momento d'inerzia barcentrico per l'accelerazione angolare del corpo rigido, verso opposto all'accelerazione e direzione perpendicolare al piano. Per ogni corpo rigido il **sistema equivalente delle forze d'inerzia**

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a}_G \\ \mathbf{C}_{in} = -J_G\ddot{\theta} = -J_G\dot{\omega} \end{cases}$$

dove  $m$  è la massa del corpo rigido,  $J_G$  è il **momento d'inerzia barcentrico** che rappresenta come la massa è distribuita attorno al baricentro.

### 1.1.3 Equazioni cardinali della dinamica di un corpo rigido



L'equazioni cardinali della dinamica di un corpo rigido sono:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{in} = 0 \\ \sum_{j=1}^n (\mathbf{P}_j - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{F}_j + (\mathbf{G} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{F}_{in} + \sum_{r=1}^{n_M} \mathbf{C}_r + \mathbf{C}_{in} = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Il polo dei momenti non necessariamente origine del sistema di riferimento.

### 1.1.4 Sistemi di corpi rigidi

Per ogni corpo rigido vale:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{i,j} + \mathbf{F}_{in,j} = 0 \\ \sum_{j=1}^n (P_{i,j} - O) \wedge \mathbf{F}_{i,j} + \sum_{r=1}^{n_M} \mathbf{C}_{i,r} + (G_j - O) \wedge \mathbf{F}_{in,i} + \mathbf{C}_{in,i} = 0 \end{cases}$$

Con:

- $j = 1, 2, \dots, n$  indice delle forze esterne per ogni corpo rigido
- $i = 1, 2, \dots, n_C$  indice dei corpi rigidi
- $r = 1, 2, \dots, n_M$  indice dei momenti/coppie esterni per ogni corpo rigido

## 1.2 Principio dei lavori virtuali

Il **lavoro virtuale** è:  $\delta L = \mathbf{F}_P \cdot \delta \mathbf{S}_P$  per le forze e  $\delta L = \mathbf{C} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}$  per le coppie, dove  $\delta \mathbf{S}_P$  e  $\delta \boldsymbol{\theta}$  sono compatibili con il vincolo. Calcoliamo il lavoro della (1.4):

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n_C} \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{i,j} \cdot \delta \mathbf{P}_{i,j} + \sum_{i=1}^{n_C} \sum_{r=1}^{n_M} \mathbf{C}_{i,r} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}_i + \sum_{i=1}^{n_C} (-m_i \mathbf{a}_{G_i} \cdot \delta \mathbf{G}_i - J_{G_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \delta \boldsymbol{\theta}_i) = 0$$

dove:  $\sum_{i=1}^{n_C} \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{i,j} \cdot \delta \mathbf{P}_{i,j}$  è il **lavoro delle forze esterne**,  $\sum_{i=1}^{n_C} \sum_{r=1}^{n_M} \mathbf{C}_{i,r} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}_i$  il **lavoro dei momenti/coppie esterni**,  $\sum_{i=1}^{n_C} -m_i \mathbf{a}_{G_i} \cdot \delta \mathbf{G}_i$  il **lavoro della forza d'inerzia** e  $\sum_{i=1}^{n_C} -J_{G_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \delta \boldsymbol{\theta}_i$  il **lavoro della coppia d'inerzia**.

Evidenzio il  $\delta L$  con le coordinate fisiche:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n_C} \sum_{j=1}^n F_{x_{i,j}} \delta x_{i,j} + F_{y_{i,j}} \delta y_{i,j} + \sum_{i=1}^{n_C} \sum_{r=1}^{n_M} C_i \delta \theta_i + \sum_{i=1}^{n_C} (-m_i a_{G_i} \delta X_{G_i} - J_{G_i} \ddot{\theta}_i \delta \theta_i)$$

Dove  $x_{G_i} = x_{G_i}(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GdL}})$ ,  $y_{G_i} = y_{G_i}(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GdL}})$ ,  $\theta_i = \theta_i(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GdL}})$  e le  $q_s$  sono le coordinate che "descrivono" i GdL del sistema di corpi rigido.

$$\begin{cases} \delta x_{G_i} = \sum_{S=1}^{n_{GdL}} \frac{\partial x_{G_i}}{\partial q_s} \delta q_s \\ \delta y_{G_i} = \sum_{S=1}^{n_{GdL}} \frac{\partial y_{G_i}}{\partial q_s} \delta q_s \\ \delta z_{G_i} = \sum_{S=1}^{n_{GdL}} \frac{\partial z_{G_i}}{\partial q_s} \delta q_s \end{cases}$$

Il lavoro diventa:

$$\delta L = \sum_{S=1}^{n_{GdL}} (Q_s + Q_{in,s}) \delta q_s = 0$$

L'equazione è soddisfatta se tutti i termini tra parentesi sono uguali a 0. I " $Q_s$ " sono chiamati **componenti lagrangiane**

$$Q_{in,s} = \sum_{i=1}^{n_C} \left( -m_i a_{G_{ix}} \frac{\partial x_{G_i}}{\partial q_s} - m_i a_{G_{iy}} \frac{\partial y_{G_i}}{\partial q_s} - m_i a_{G_{iz}} \frac{\partial z_{G_i}}{\partial q_s} \right)$$

## 1.3 Bilancio di potenze

Riprendiamo in esame il principio dei lavori virtuali:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n_C} \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{i,j} \cdot \delta \mathbf{P}_{i,j} + \sum_{i=1}^{n_C} \sum_{r=1}^{n_M} \mathbf{C}_{i,r} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}_i + \sum_{i=1}^{n_C} (-m_i \mathbf{a}_{G_i} \cdot \delta \mathbf{G}_i - J_{G_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \delta \boldsymbol{\theta}_i) = 0$$

Deriviamo:

$$\frac{\delta L}{dt} = \sum_{i=1}^{n_C} \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{i,j} \cdot \frac{\delta \mathbf{P}_{i,j}}{dt} + \sum_{i=1}^{n_C} \sum_{r=1}^{n_M} \mathbf{C}_{i,r} \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\theta}_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n_C} (-m_i \mathbf{a}_{G_i} \cdot \frac{\delta \mathbf{G}_i}{dt} - J_{G_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\theta}_i}{dt}) = 0 \quad (1.5)$$

dove:  $\frac{\delta \mathbf{P}_{i,j}}{dt} = \mathbf{v}_{P_{i,j}}$ ,  $\frac{d\boldsymbol{\theta}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}_i$ ,  $\frac{d\mathbf{G}_i}{dt} = \mathbf{v}_{C_i}$ ,  $\frac{d\boldsymbol{\theta}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}_i$

- $W_{i,j} = \mathbf{F}_{i,j} \cdot \frac{d\mathbf{P}_{i,j}}{dt} = \mathbf{F}_{i,j} \cdot \mathbf{v}_{i,j}$  potenza della forza  $\mathbf{F}_{i,j}$
- $W_{i,r} = \mathbf{C}_{i,r} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{C}_{i,r} \cdot \boldsymbol{\omega}_i$  potenza della coppia/momento  $\mathbf{C}_{i,r}$
- $W_{in,i} = -m_i \mathbf{a}_{G_i} \cdot \mathbf{v}_{G_i} - J_{G_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i$  potenza del sistema equivalente d'inerzia del corpo i-esimo

$$(1.5) = \sum_{i=1}^{n_C} \sum_{j=1}^n W_{i,j} + \sum_{i=1}^{n_C} \sum_{r=1}^{n_M} W_{i,r} + \sum_{i=1}^{n_C} W_{in,i} = 0 = \sum W + \sum W_{in}$$

dove:  $\sum W$  è la potenza delle forze e coppie/momenti esterni e  $\sum W_{in}$  è la potenza delle forze e coppie d'inerzia. È un'equazione in un'incognita ( $\mathbf{F}$ ).

Il bilancio di potenze è:  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_P + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} + (-m \mathbf{a}_G \cdot \mathbf{v}_G - J_G \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\omega}) = 0$

## 1.4 Teorema dell'energia cinetica

È il duale del bilancio di potenze.

Calcolo l'energia cinetica di un corpo rigido, con  $V$  volume infinitesimo,  $P$  punto generico e  $m$  massa del corpo rigido.

$$E_C = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_P \rho dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}_P^2 \rho dV$$

Applico il teorema di Rivals:  $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - G)$

$$E_c = \frac{1}{2} \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_G \int_V \rho dV + \frac{1}{2} \mathbf{v}_G \cdot \left( \boldsymbol{\omega} \wedge \int_V (P - G) \rho dV \right) + \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\omega} \wedge \int_V (P - G) \rho dV \right) \cdot \mathbf{v}_G + \frac{1}{2} \omega^2 \int_V |P - G|^2 \rho dV =$$

Dove  $\int_V \rho dV = m$ ,  $\omega^2 \int_V |P - G|^2 \rho dV$  viene da  $(\boldsymbol{\omega} \wedge (P - G)) \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - G)) = \omega^2 |P - G|^2$  e  $\int_V |P - G|^2 \rho dV = J_G$  e  $\int_V (P - G) \rho dV$  è il momento statico rispetto al baricentro  $G (\equiv O)$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_G m + \frac{1}{2} \omega^2 \int_V |P - G|^2 \rho dV = \frac{1}{2} \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_G m + \frac{1}{2} J_G \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2$$

Il risultato ottenuto è il teorema di König. Deriviamo rispetto al tempo le  $E_{c_i}$  del corpo rigido i-esimo:

$$\frac{dE_{c_i}}{dt} = \frac{1}{2} m \mathbf{a}_G \cdot \mathbf{v}_G + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{a}_G + \frac{1}{2} J_G \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = m \mathbf{a}_G \cdot \mathbf{v}_G + J_G \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\omega} = -W_{in,i}$$

Dunque dal teorema dell'energia cinetica:  $\sum W = \frac{dE_c}{dt}$  Utilizziamo il bilancio di potenze per il calcolo di  $F$ :

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_G + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_G + \frac{1}{2} J_G \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) = m \mathbf{a}_G \cdot \mathbf{v}_G + J_G \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

## 1.5 Equazione di Lagrange

L'equazione di Lagrange è:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$$

Dove:  $E_c$  l'energia cinetica,  $V$  l'energia potenziale,  $Q_k$  la componente lagrangiana =  $\frac{\delta L}{\delta q_k}$ ,  $L$  il lavoro delle forze esterne e delle interne non conservative e  $q_k$  sono le coordinate libere indipendenti.

Dim.:

Utilizzo il principio di D'Alambert e il principio dei lavori virtuali:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

per  $i = 1, 2, \dots, N$  coordinate fisiche.

La descrizione del moto la posso fare anche mediante le coordinate generalizzate indipendenti  $q_k$  con  $k = 1, 2, \dots, n$ .  $\mathbf{x}_i$  non sono esplicitamente dipendenti dal tempo.  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$  per  $i = 1, 2, \dots, N$ . Calcolo la velocità delle  $\mathbf{x}_i$ :

$$\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \mathbf{q}_k$$

Dato che  $\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}$  non dipende da  $\dot{q}_k \implies \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k}$  per  $i = 1, 2, \dots, N$  e  $k = 1, 2, \dots, n$ . Perché:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k}$$

Spostamenti virtuali delle  $\mathbf{x}_i$ :

$$\delta \mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_n} \delta q_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Sostituisco  $\delta \mathbf{x}_i$  nella seconda parte del PVL:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \quad (1.6)$$

Ogni termine dell'equazione precedente lo scrivo come:

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right) \\ \implies m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \right] \left( \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i \right) \quad (1.7)$$

Riprendo la (1.6) e sostituisco la (1.7)

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = \sum_{k=1}^n \left[ \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i \right) \right] \delta q_k = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} \right] \delta q_k \quad (1.8)$$

Considero le forze esterne  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, \dots, \dot{\mathbf{x}}_n, t)$ . Calcolo il lavoro virtuale delle forze esterne, utilizzando la (1.6):

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k$$

Considero il lavoro delle forze interne conservative ( $V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ ) e non conservative:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{I_i} \cdot \delta \mathbf{x}_i = \delta L_C + \delta L_{nC} = -\delta V + \sum_{k=1}^n Q_{nC_k} \delta q_k = \\ = - \left( \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k \right) + \sum_{k=1}^n Q_{nC_k} \delta q_k = - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial V}{\partial q_k} - Q_{nC_k} \right) \delta q_k \quad (1.9)$$

Sostituisco la (1.7), (1.8), (1.9) nell'equazione di D'Alembert:

$$- \sum_{k=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} - Q_{nC_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0$$

Dunque:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{nC} + Q$$

## 1.6 Forze conservative

### 1.6.1 Forza elastica

La forza elastica:  $\mathbf{F}_c = -k\delta$  (Legge di Hooke), dove  $k$  è la **rigidezza** (parametro caratteristico),  $\delta = |\Delta \mathbf{x}_1 - \Delta \mathbf{x}_2|$  è la **variazione di lunghezza** della molla. Il lavoro di deformazione di una molla è:

$$L_{def} = \int_0^\delta \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{y} = \int_0^\delta -k\eta d\eta = -\frac{1}{2}k\delta^2$$

Il potenziale:  $V_e = -L_{def} = \frac{1}{2}k\delta^2$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$$

### 1.6.2 Forza gravitazionale

$$L_g = \int_0^h -mg \cdot dy = -mgh, \quad V_g = mgh$$

### 1.6.3 Forze dissipative di tipo viscoso

In generale gli effetti dissipativi sono non lineari, un caso particolare è il dissipatore viscoso. La forza è:  $\mathbf{F}_d = -r\dot{\delta}$ , dove  $\mathbf{F}_d$  è la **forza smorzante**,  $r$  è il **coefficiente di smorzamento viscoso** e  $\dot{\delta}$  è la **velocità dello spostamento**. La componente lagrangiana dell'effetto dello smorzamento viscoso:

$$Q_{d,k} = -r\dot{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial q_k}$$

$\delta$  dipende dalle coordinate libere  $\delta = \delta(q_k) \rightarrow \dot{\delta} = \sum_k \frac{\partial \delta}{\partial q_k} \dot{q}_k$ ,  $\frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \delta}{\partial q_k}$

$$Q_{d,k} = -r\dot{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial q_k} = -r\dot{\delta} \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{1}{2} r \dot{\delta}^2 \right) = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} D$$

dove:  $D = \frac{1}{2} r \dot{\delta}^2$  è la **funzione dissipativa (per smorzamento viscoso)**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k$$

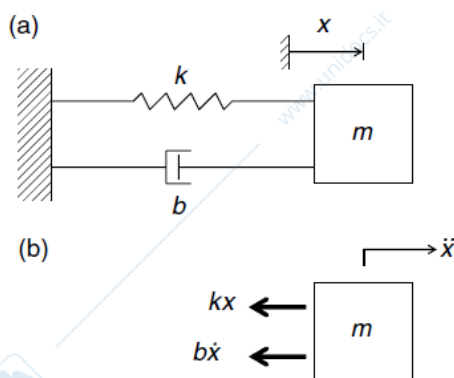
come componenti lagrangiane restano tutte le altre forze esterne che lavorano.

## Capitolo 2

# Vibrazioni

### 2.1 Vibrazioni di sistema a 1 GdL

Prendendo un sistema come in figura:



È in equilibrio dinamico:  $-F_i - F_e - F_d + F(t) = 0$ , dove  $F_i = m\ddot{x}$  è la forza di inerzia,  $F_e = kx$  è la forza elastica,  $F_d = r\dot{x}$  è la forza dissipativa di tipo viscoso e  $F(t)$  è una forza esterna, quindi l'equazione di moto del sistema è  $m\ddot{x} + kx + r\dot{x} = F(t)$ .

Dall'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\delta^* L}{\delta^* q_k}$$

Dove:  $\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ ;  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}$ ;  $\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$ ;  $\frac{\partial V}{\partial x} = kx$ ;  $\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = r\dot{x}$ ;  $\frac{\delta^* L}{\delta^* x} = F(t)$ . Quindi si ottiene:  $m\ddot{x} + kx + r\dot{x} = F(t)$ .

#### 2.1.1 Vibrazioni del sistema: moto libero non smorzato

Vibrazioni dove non agiscono forzanti esterne ( $F(t) = 0$ ) (moto libero) e non è presente uno smorzamento ( $r = 0$ ). Quindi l'equazione di moto del sistema è:  $m\ddot{x} + kx = 0$ . Prendendo  $x(t) = X e^{\lambda t}$  si ottiene:

$$m\lambda^2 X e^{\lambda t} + k X e^{\lambda t} = 0 \implies (m\lambda^2 + k) X e^{\lambda t} = 0$$

$X = 0$  è la soluzione banale.

Se  $X \neq 0$ :  $m\lambda^2 + k = 0$  è l'equazione caratteristica, le cui soluzioni sono:  $\lambda_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$ , dove  $\omega$  è la pulsazione naturale del sistema ( $[\omega] = \text{rad/s}$ ) e  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  è la frequenza propria ( $[f] = \text{Hz}$ ).

$$\begin{aligned} x(t) &= X_1 e^{\lambda_1 t} + X_2 e^{\lambda_2 t} = X_1 e^{i\omega t} + X_2 e^{-i\omega t} = X_1 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + X_2 (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) = \\ &= (X_1 + X_2) \cos(\omega t) + i(X_1 - X_2) \sin(\omega t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = C \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Dove  $C^2 = A^2 + B^2$ ,  $\tan(\phi) = -\frac{B}{A}$ . Per determinare  $A$  e  $B$  bisogna imporre le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

### 2.1.2 Vibrazioni del sistema: moto libero con smorzamento

L'equazione di moto del sistema è:  $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ , con  $x(t) = Xe^{\lambda t}$ . Anche in questo caso la soluzione banale è:  $X = 0$ .

Se  $X \neq 0$ : l'equazione caratteristica è:  $m\lambda^2 + r\lambda + k = 0$ , che ha per soluzioni:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$$

Se  $\Delta = 0$  si ha  $\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = \left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \omega^2 = 0$ ,  $r_c = 2m\omega$  è lo **smorzamento critico** e  $h = \frac{r}{r_c} = \frac{r}{2m\omega}$  è il **fattore di smorzamento** (o coefficiente di smorzamento) (smorzamento adimensionale).

1.  $r < r_c$ :  $\Delta > 0$  e  $h > 1$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{r}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega_d$$

dove  $\alpha = \frac{r}{2m}$  e  $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = \omega\sqrt{1 - h^2}$  è la **pulsazione di sistema**

$$x(t) = X_1 e^{(-\alpha + i\omega_d)t} + X_2 e^{(-\alpha - i\omega_d)t} = e^{-\alpha t} (X_1 e^{i\omega_d t} + X_2 e^{-i\omega_d t}) = e^{-\alpha t} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t]$$

$A$  e  $B$  si determinano imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

$x(t)$  è asintoticamente nulla:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

2.  $r > r_c$ :  $\Delta > 0$  e  $h > 1$   $\lambda_{1/2} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta}$ , con  $\lambda_1 = -\alpha_1$  e  $\lambda_2 = -\alpha_2$  dunque  $x(t) = X_1 e^{-\alpha_1 t} + X_2 e^{-\alpha_2 t}$   $x(t)$  è asintoticamente nulla:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

3.  $r = r_c$ :  $\Delta = 0$  e  $h = 1$  Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ , quindi:  $x(t) = X_1 e^{-\alpha t} + X_2 t e^{-\alpha t}$   $x(t)$  è asintoticamente nulla:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  ("È la soluzione che va a 0 più velocemente")

### 2.1.3 Sistemi vibranti con forzamento

L'equazione di moto del sistema è:  $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$ , dove  $F(t)$  è detta **forzante**, che è funzione solo del tempo. La soluzione è  $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$  dove  $x_g(t)$  è l'**integrale generale**, che è la soluzione dell'equazione di moto omogenea ( $\lim_{t \rightarrow \infty} x_g(t) = 0$  e  $x_p(t)$  è l'**integrale particolare**. Essendo l'equazione di moto lineare è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.

- **in transitorio** ("t" piccolo): la soluzione è caratterizzata dal contributo sia dell'integrale generale, sia dell'integrale particolare
- **a regime** ("t" grande):  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_g = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p(t)$ , l'integrale particolare è la soluzione a regime

#### Forzante costante

Si ha una **forzante** a gradino  $F(t) = F_0$ , dunque l'equazione di moto è  $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0$ . Dalla teoria dell'equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x_p(t) = X_0 \\ \dot{x}_p(t) = 0 \\ \ddot{x}_p(t) = 0 \end{cases}$$

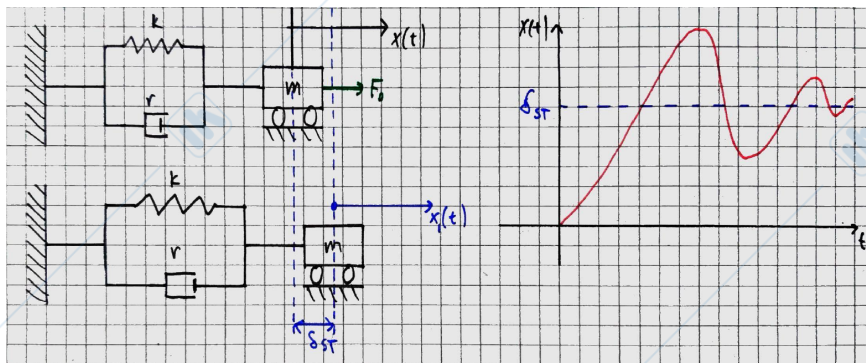
Sostituiamo questi risultati nell'equazione di moto:  $kX_0 = F_0$  Dunque  $X_0 = \frac{F_0}{k} = \delta_{ST}$  è lo spostamento dovuto all'applicazione "statica" della forzante.

La soluzione dell'equazione di moto è:

$$x(t) = e^{-\alpha t} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t] + \frac{F_0}{k}$$

Per determinare  $A$  e  $B$  impongo le condizioni iniziali, ad esempio:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \rightarrow x(t) = \frac{F_0}{k} [1 - (h \sin \omega_d t + \cos \omega_d t) e^{-\alpha t}] \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{F_0}{k} = \delta_{ST}$$



Ad esempio se la forza costante è la gravità aspetto che il sistema assuma la configurazione di equilibrio statico prima di studiare ulteriori moti dovuti ad altre forzanti. Posso assumere che "dopo un po'" il sistema si muoverebbe secondo il nuovo sistema di riferimento  $x_1(t)$ .

### Forzante armonica

La **forzante** è:  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ , dove  $F_0$  è l'**ampiezza** della forzante e  $\Omega$  è l'**pulsazione** della forzante. L'**integrale particolare** è:  $x_p(t) = X_0 \cos(\Omega t + \phi)$ , dove  $X_0$  è l'**ampiezza** e  $\phi$  è la **fase**, la soluzione è dello stesso tipo della funzione della forzante.

$$\begin{cases} x_p(t) = X_0 \cos(\Omega t + \phi) \\ \dot{x}_p(t) = -\Omega X_0 \sin \Omega t + \phi \\ \ddot{x}_p(t) = -\Omega^2 X_0 \cos(\Omega t + \phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -m\Omega^2 X_0 \cos(\Omega t + \phi) - r\Omega X_0 \sin(\Omega t + \phi) + kX_0 \cos(\Omega t + \phi) = F_0 \cos(\Omega t)$$

Ora è necessario applicare le formule trigonometriche per  $\cos(\Omega t + \phi)$  e  $\sin(\Omega t + \phi)$  e raccogliere i termini in  $\cos(\Omega t)$  e  $\sin(\Omega t)$ .

$$(-m\Omega^2 \cos \phi - r\Omega \sin \phi + k \sin \phi) X_0 \cos \Omega t = F_0 \cos \Omega t \quad (2.1)$$

$$(m\Omega^2 \sin \phi - r\Omega \cos \phi - k \sin \phi) X_0 \sin \Omega t = 0 \quad (2.2)$$

Dalla **2.2**:  $\tan \phi = -\frac{\Omega r}{k - m\Omega^2} \rightarrow$

$$\phi = \arctan -\frac{\Omega r}{k - m\Omega^2} \quad (2.3)$$

Sostituisco **2.2** nella **2.1**

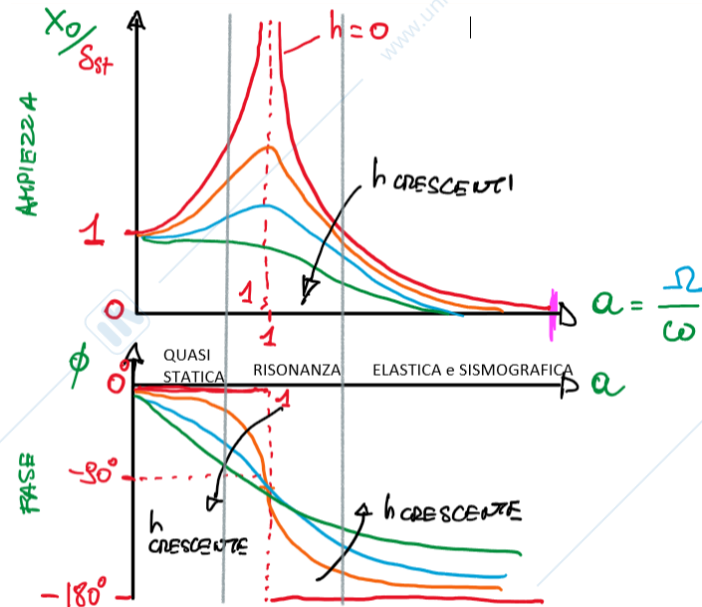
$$X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (\Omega r)^2}} \quad (2.4)$$

Divido il numeratore e il denominatore di **2.3** e **2.4** per  $k$ :

$$X_0 = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 \left(\frac{r}{r_c}\right)^2}} = \frac{\delta_{ST}}{\sqrt{(1 - a^2)^2 + 4a^2 b^2}}$$

dove  $a$  è il **rapporto tra le pulsazioni** e  $b$  **fattore di smorzamento**.

Sono rappresentazioni adimensionali di ampiezza e fase della risposta forzata: il **coefficiente di amplificazione dinamica**:  $\frac{X_0}{\delta_{ST}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - a^2)^2 + 4a^2 b^2}}$  e  $\tan \phi = -\frac{\Omega r}{k - m\Omega^2} = -\frac{2\frac{\Omega}{\omega} \frac{r}{r_c}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = -\frac{2ab}{1 - a^2}$



Se  $h = 0$ :  $\frac{x_0}{\delta_{ST}} = \frac{1}{1-a^2}$  e se  $a = 1 \rightarrow \Omega = \omega$  (condizione di risonanza)  $\lim_{a \rightarrow 1} x_0 = \infty$  e  $\tan \phi = 0$  si ha un "salto di fase" in corrispondenza di  $\Omega = \omega$ .

- in tutti i casi  $X_0 = \delta_{ST}$  per  $\Omega = 0$ ;  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{X_0}{\delta_{ST}} = 0$
- se  $h \neq 0$ :  $\phi = -90$  per  $a = 1 = \frac{\Omega}{\omega}$
- se  $h \neq 0$ :  $\frac{X_0}{\delta_{ST}} = \frac{1}{2h}$  per  $a = 1 = \frac{\Omega}{\omega}$

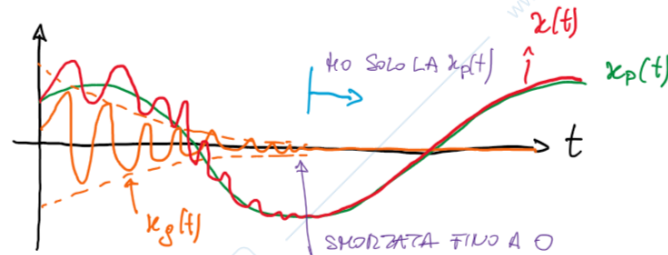
La classificazione in "zone" della risposta del sistema:

- $a \ll 1 \Rightarrow \Omega \ll \omega$ : zona quasi statica
- $a = 1 \Rightarrow \Omega = \omega$ : zona di risonanza
- $a \gg 1 \Rightarrow \Omega \gg \omega$ : zona elastica o sismografica

La soluzione del sistema:

$$x(t) = x_g(t) + x_s(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) + X_0 \cos(\Omega t + \phi)$$

Dobbiamo imporre le condizioni iniziali per ottenere A e B:  $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0 \end{cases}$



$$F(t) = F_0 \cos \Omega t = \Re(F_0 e^{i\Omega t}) \rightarrow m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = \Re(F_0 e^{i\Omega t}) \rightarrow \begin{cases} x_p(t) = X_0^* e^{i\Omega t} \\ \dot{x}_p(t) = i\Omega X_0^* e^{i\Omega t} \\ \ddot{x}_p(t) = -\Omega^2 X_0^* e^{i\Omega t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-\Omega^2 m + i\Omega r + k)X_0^* e^{i\Omega t} = F_0 e^{i\Omega t} \Rightarrow X_0^* = \frac{F_0}{(-\Omega^2 m + i\Omega r + k)}$$

Devo razionalizzarla, poi calcoliamo modulo e fase:

$$|X_0^*| = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (\Omega r)^2}} \text{ e } \tan \phi = \frac{\Omega r}{k - m\Omega^2} \Rightarrow x_p(t) = \Re(X_0^* e^{i\Omega t}) = |X_0^*| \cos(\Omega t + \phi)$$

### Forzante periodica

Una funzione periodica è per definizione:  $F(t) = F(t + T)$  e si può espandere in **serie di Fourier**:

$$F(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos k\Omega_0 t + B_k \sin k\Omega_0 t]$$

dove:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^L F(t) \cos k\Omega_0 t dt; \quad B_k = \frac{2}{T} \int_0^L F(t) \sin k\Omega_0 t dt$$

Sistema vibrante con forzante periodica:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos k\Omega_0 t + B_k \sin k\Omega_0 t]$$

è un'equazione differenziale lineare, quindi è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.

$$x_p = x_{p0} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{pck} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{psk}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{p0} + r\dot{x}_{p0} + kx_{p0} &= F_0 & m\ddot{x}_{ps1} + r\dot{x}_{ps1} + kx_{ps1} &= B_1 \sin \Omega_0 t \\ m\ddot{x}_{pc1} + r\dot{x}_{pc1} + kx_{pc1} &= A_1 \cos \Omega_0 t & & \vdots \\ & \vdots & & \vdots \\ m\ddot{x}_{pcn} + r\dot{x}_{pcn} + kx_{pcn} &= A_n \cos n\Omega_0 t & m\ddot{x}_{psn} + r\dot{x}_{psn} + kx_{psn} &= A_n \sin n\Omega_0 t \end{aligned}$$

Ciascuna equazione è la soluzione di un sistema vibrante a 1 GdL eccitato da forzante armonica.

#### 2.1.4 Risposta di un sistema a 1 GdL in condizioni di risonanza senza smorzamento

Studiamo il sistema utilizzando la risposta in frequenza, che mostra cosa succede a regime ed utile quando l'ampiezza dell'integrale particolare è infinito (questo è un comportamento asintotico). La forzante è periodica:  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$

$$x(t) = x_G + x_P = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \cos \Omega t$$

Determino  $C_1$  e  $C_2$  con le condizioni iniziali e in risonanza  $\omega = \Omega$ , quindi  $k - m\Omega^2 = 0$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \\ C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow x(t) &= \left( x_0 - \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \right) \cos \omega t + \left( \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) \sin \omega t + \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \cos \Omega t \\ \rightarrow x(t) &= x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \delta_{ST} \left( \frac{\cos \Omega t - \cos \omega t}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \right) \end{aligned}$$

In risonanza  $\frac{\Omega}{\omega} = 1$ , quindi studio l'ultimo termine:

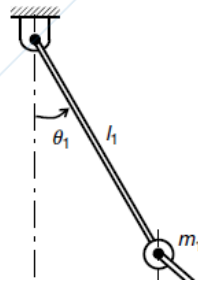
$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega} \frac{\cos \Omega t - \cos \omega t}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \frac{\frac{d}{d\Omega}(\cos \Omega t - \cos \omega t)}{\frac{d}{d\Omega} \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)} = \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \frac{-t \sin \Omega t}{-2 \frac{\Omega}{\omega^2}} = \frac{\omega t}{2} \sin \omega t$$

Dunque:

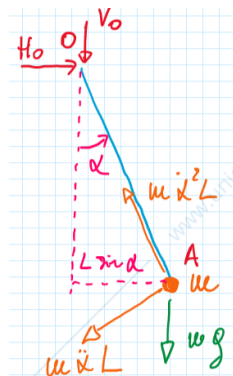
$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{\omega t}{2} \delta_{ST} \sin \omega t$$

dove  $x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t$  è la risposta in moto libero anche se non ho messo smorzamento, ho una risposta nel tempo finita,  $\frac{\omega t}{2} \delta_{ST} \sin \omega t$  è la risposta regime in risonanza quindi per  $t \rightarrow \infty$ . La risposta del sistema va a infinito, ma ci mette tempo infinito (proporzionale a t). L'ampiezza cresce linearmente con t (posso eccitare il sistema in risonanza per un "po" di tempo prima di arrivare ad ampiezze pericolose).

### 2.1.5 Pendolo



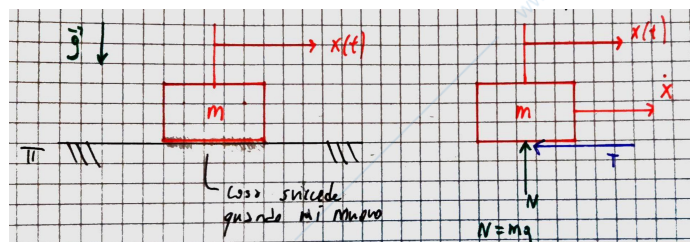
Imponiamo nell'equazione di moto gli equilibri dinamici (equilibrio alla rotazione in O).



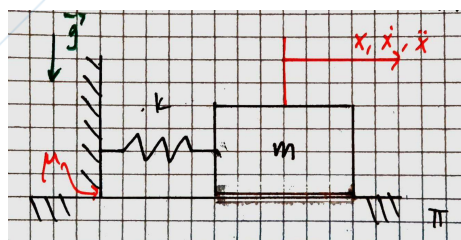
$\sum M_0^* = 0$  dove \* indica che usiamo tutte le forze (inerzie comprese).  
 Quindi:  $m\ddot{\alpha}L^2 + mgL \sin \alpha = 0$  e si ottiene:  $L\ddot{\alpha} + g \sin \alpha = 0$  che è un'equazione differenziale non lineare. Ma, se consideriamo le "piccole" oscillazioni  $\sin \alpha \simeq \alpha$ , in questo modo linearizzo l'equazione di moto:  $L\ddot{\alpha} + g\alpha = 0$  e si ottiene  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ , nel pendolo linearizzato la pulsazione non dipende dalla massa, ma solo da  $g$  e  $L$ . Dunque il periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  è vero che il pendolo è costante.  
 $\alpha(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$  è la soluzione armonica.

### 2.1.6 Sistema libero con smorzamento per attrito radente

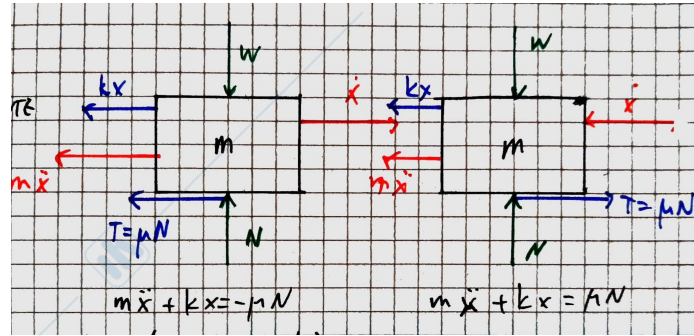
L'attrito radente è l'interazione macroscopica tra superfici in moto relativo. Si genera un'azione tangenziale alle superfici in moto proporzionale alla reazione normale (leggi di Coulomb sull'attrito)



Per le leggi di Coulomb:  $T = \mu N$ , dove  $N$  modulo reazione normale,  $\mu$  coefficiente attrito dinamico e  $T$  modulo reazione tangenziale. Forma vettoriale:  $\mathbf{T} = -\text{sign}(\dot{x})\mu mg \mathbf{i}$



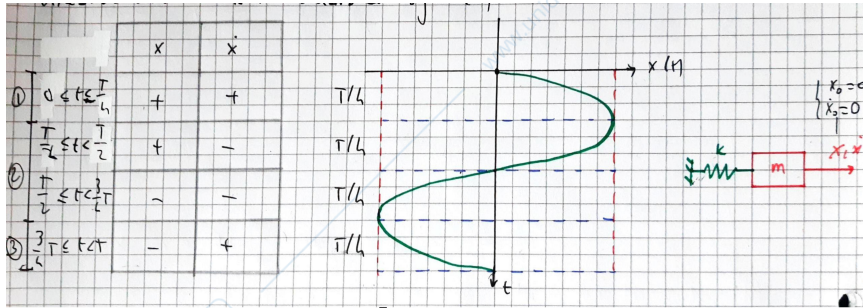
Sistema libero con attrito radente (no smorzatore viscoso):



A seconda del verso di  $\dot{x}(t)$  ho l'equazione di moto che cambia.

$$\rightarrow m\ddot{x} + \mu mg \text{sign}(\dot{x}) + kx = 0$$

Che è un'equazione differenziale non lineare. Si può procedere con la linearizzazione a "tratti" studiando  $\text{sign}(\dot{x})$



1.  $m\ddot{x} + kx = -\mu N$  ← forzante (costante nel tempo), equazione valida da quando  $\text{sign}(\dot{x}) = 1$

$$x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + \left(-\frac{\mu N}{k}\right)$$

2.  $m\ddot{x} + kx = \mu N \rightarrow x(t) = A_3 \cos \omega t + A_4 \sin \omega t + \left(\frac{\mu N}{k}\right)$

Devo scegliere la soluzione a seconda di  $\text{sign}(\dot{x})$  e imporre le condizioni iniziali.

Considero un caso in cui esiste il moto, ad esempio se impongo:  $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ . Devo usare la soluzione 2.

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{k} \\ A_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \cos \omega t + \frac{\mu N}{k} \\ \dot{x}(t) = -\omega \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \sin \omega t \end{cases}$$

Soluzione valida solo per  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$

Quando  $t = \frac{\pi}{\omega}$

$$\begin{cases} x_1 \left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \cos \omega \frac{\pi}{\omega} + \frac{\mu N}{k} = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right) \\ \dot{x}_1 \left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = -\omega \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \sin \omega \frac{\pi}{\omega} = 0 \end{cases}$$

Diventano le nuove "condizioni iniziali" da imporre nell'equazione 1. quando  $\text{sign}(\dot{x}) = 1$ .

Uso la soluzione 1.:

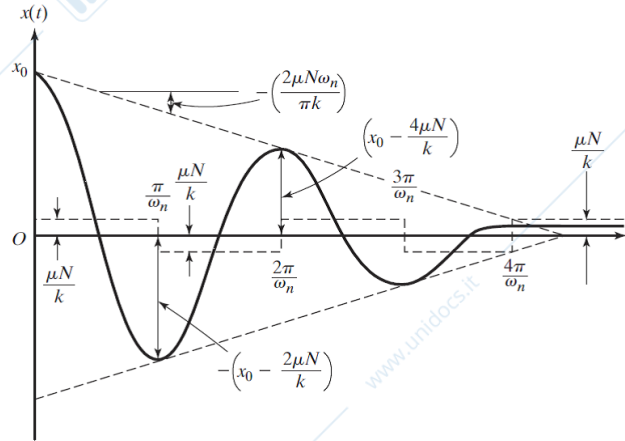
$$\begin{cases} x_1 \left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right) \\ \dot{x}_1 \left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 = -\left(-x_0 + \frac{3\mu N}{k}\right) \\ A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = -\left(-x_0 + \frac{3\mu N}{k}\right) \cos \omega t - \frac{\mu N}{k} \\ \dot{x}(t) = -\omega \left(-x_0 + \frac{3\mu N}{k}\right) \sin \omega t \end{cases}$$

Soluzione valida per  $\frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{cases} x_2(t = \frac{2\pi}{\omega}) = x_0 - \frac{4\mu N}{k} \\ \dot{x}_2(t = \frac{2\pi}{\omega}) = 0 \end{cases}$$

Queste sono le nuove "condizioni iniziali" per l'equazione 2. quando  $\text{sign}(\dot{x}) = -1$ .



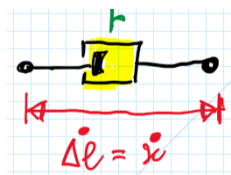
Posso esprimere la riduzione di ampiezza per ogni periodo come  $|x_1 - x_0|$  o  $|x_2 - x_1| = \frac{2\mu N}{k}$ . Il moto continuerà finché la forza elastica sarà maggiore della forza d'attrito  $\rightarrow$  fino a che la riduzione dello spostamento iniziale non sarà minore dello spostamento statico della forza d'attrito.

$$x_0 - n \frac{2\mu N}{k} \leq \frac{\mu N}{k}; \quad n \geq \frac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}}$$

dove  $n$  è il numero di semiperiodi.

### 2.1.7 Sistema forzato con smorzamento dovuto ad attrito radente

**Smorzamento equivalente:** equipareremo la potenza persa/energia dissipata da un fenomeno dovuto a smorzamento (non viscoso) all'energia dissipata in un periodo da uno smorzatore viscoso. In uno smorzatore viscoso:

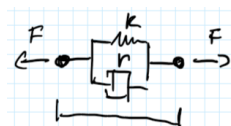


$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \times \mathbf{v} = -rv^2 = -r \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Dove  $W$  è l'energia. Sto considerando sistema lineare vibrante.

$$\Delta W = \int_0^T r \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \int_0^{2\pi} r \left(\frac{d}{dt}(x(t))\right)^2 dt = \int_0^{2\pi} r x^2 \omega \cos^2 \omega t d(\omega t) = r x^2 \omega \pi$$

Dove  $\Delta W$  l'energia dissipata in un periodo tra smorzatore viscoso sottoposto a moto armonico. Se in parallelo allo smorzatore c'è una molla, non cambia nulla.



$$F = -r\dot{x} - kx \leftarrow x(t) = X \sin \omega t$$

$$F = -kX \sin \omega t - r\omega X \cos \omega t \quad \Delta W = \int_0^{2\pi/\omega} F v dt \rightarrow \dots \rightarrow r\omega^2 X^2 \pi$$

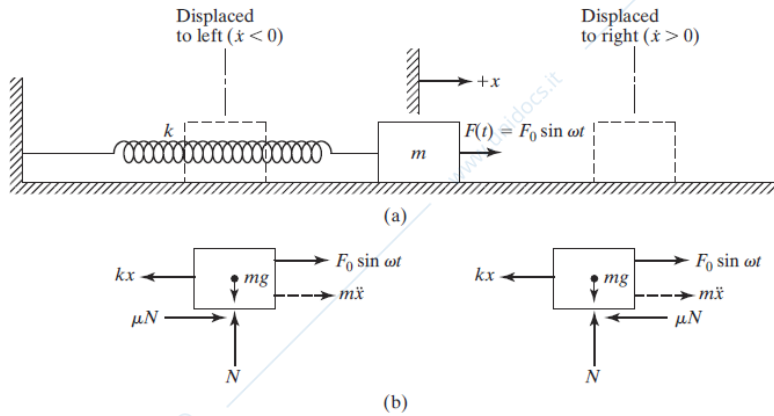
### 2.1.8 Sistemi vibranti a 1 GdL con smorzamento per attrito radente

- Potenza dissipata per ciclo in uno smorzatore viscoso:

$$\Delta W = \pi r \omega_d X^2$$

- Potenza dissipata per ciclo in presenza di attrito radente:

$$\Delta W = h \mu N$$



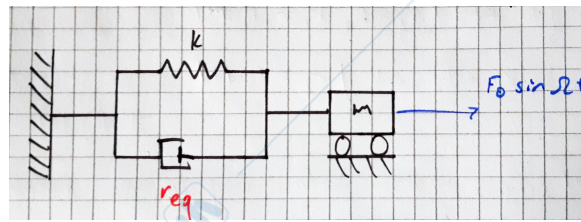
Sistema forzato con forzante  $F(t) = F_0 \sin \Omega t$

$$m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F_0 \sin \Omega t$$

Il termine  $\pm \mu N$  comporta la non linearità.

Soluzione del moto forzato  $\rightarrow$  integrale particolare e a regime  $\rightarrow$  suppongo che la potenza dissipata per attrito viscoso sia la stessa (per ciclo) dissipata da uno smorzatore equivalente.

$$\Delta W = \Delta W \rightarrow \pi r_{eq} \omega x^2 = 4\mu N X \rightarrow r_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi \omega N}$$



$$x_P(t) = X \sin(\Omega t + \varphi); \quad X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (r_{eq}\Omega)^2}} = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta_{eq}\frac{\Omega}{\omega})^2}}$$

$$\zeta_{eq} = \frac{r_{eq}}{r_c} = \frac{4\mu N}{\pi \Omega X} \cdot \frac{1}{2m\omega} = \frac{2\mu N}{\pi \Omega m \omega}$$

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (\frac{4\mu N}{\pi k X})^2}} \rightarrow X = \frac{F_0}{k} \left[ \frac{1 - (\frac{4\mu N}{\pi F_0})^2}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Verifica che il numeratore sia maggiore di 0.

$$(*) \quad 1 - \left( \frac{4\mu N}{\pi F_0} \right)^2 > 0; \quad \frac{F_0}{\mu N} > \frac{4}{\pi}$$

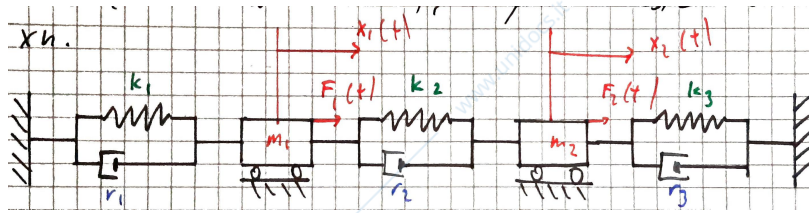
L'equivalenza di dissipazione di potenza vale solo se la  $F_0$  è maggiore di  $\frac{4}{\pi}$  volte la forza di attrito  $\mu N$ .

$$\varphi = \arctan \left( \frac{r_{eq} \Omega}{k - m \Omega^2} \right) = \arctan \left( \frac{\frac{4\mu N}{\pi k x}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \right) = \arctan \left( \frac{\frac{4\mu N}{\pi F_0}}{\sqrt{1 - \left( \frac{4\mu N}{\pi F_0} \right)^2}} \right)$$

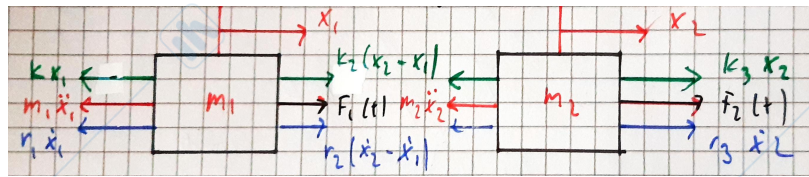
Se la (\*) non è verificata  $\rightarrow$  soluzione armonica dell'equazione lineare di moto.

## 2.2 Sistemi vibranti a 2-n GdL

Utilizzeremo un'approccio matriciale, lo mostreremo per 2 GdL. Per ragioni pratiche (otterremo matrici  $2 \times 2$ ), ma potremo estendere a n GdL, con matrici  $n \times n$ .



**Equilibri dinamici** ("corpo libero" con tutte le forze agenti)  $\implies$  equilibrio in direzione orizzontale  $\rightarrow$  per ogni massa.



**Sistema delle equazioni di moto del sistema con smorzamento e forzamento:**

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (r_1 + r_2) \dot{x}_1 - r_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - r_2 \dot{x}_1 + (r_2 + r_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = F_2(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

Da 2.5 posso calcolare:

1. Frequenze proprie naturali del sistema  $\rightarrow$  uso sistema omogeneo non smorzato
2. **Modi di vibrare**  $\rightarrow$  sistema omogeneo e non smorzato

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \text{ Matrice di massa}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \text{ Matrice di rigidità}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 \\ -r_2 & r_2 + r_3 \end{bmatrix} \text{ Matrice di smorzamento}$$

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \text{ Vettore delle forzanti}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \text{ Vettore degli spostamenti}$$

La **2.5** può essere scritta come:

$$[M]\ddot{\mathbf{x}} + [R]\dot{\mathbf{x}} + [K]\mathbf{x} = \mathbf{F}$$

Dal punto di vista formale il sistema di equazioni di moto è uguale all'equazione di moto del sistema a 1 GdL. In notazione matriciale nulla cambia se le matrici o i vettori sono  $2 \times 2 \div 2 \times 1$  oppure  $n \times n \div n \times 1$ .

Osserviamo che le matrici  $[M]$ ,  $[R]$  e  $[K]$  sono simmetriche:

$$[M] = [M]^{\perp} \quad [R] = [R]^{\perp} \quad [K] = [K]^{\perp}$$

1. Calcolo le frequenze proprie:

$$[M]\ddot{\mathbf{x}} + [K]\mathbf{x} = 0 \longrightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_2 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Ipotizziamo una soluzione armonica per il sistema **2.6**

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.7)$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.8)$$

Sostituisco **2.7** e **2.8** in **2.6**

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega^2 X_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 X_2 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2))X_1 - k_2X_2) \cos(\omega t + \varphi) = 0 & X_1 \neq 0 \\ ((-k_2X_1 + (-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3))X_2) \cos(\omega t + \varphi) = 0 & X_2 \neq 0 \end{cases}$$

$X_1, X_2$  devono essere diverse da 0, altrimenti si ha la soluzione banale: il sistema non si muove.

$$\begin{cases} (-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2))X_1 - k_2X_2 = 0 \\ -k_2X_1 + (-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3))X_2 = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Sistema algebrico omogeneo  $x_1$  e in  $x_2$  perché possa avere una soluzione non banale bisogna imporre che il determinante della matrice dei coefficienti sia nullo.

$$\det \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + (k_2 + k_3) \end{bmatrix} = 0$$

$$(m_1m_2)\omega^2 - ((k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1)\omega^2 + ((k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2) = 0$$

Equazione caratteristica  $\rightarrow$  ordine  $2m$  in  $\omega$   $\rightarrow$  per noi con 2 GdL  $\rightarrow$  ordine  $4^\circ$  in  $\omega$

$$\omega_1^2\omega_2^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1m_2} \right) \mp$$

$$\mp \frac{1}{2} \left( \left( \frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1m_2} \right)^2 - 4 \left( \frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2}{m_1m_2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Associati ad  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono i rapporti tra  $X_1$  e  $X_2$  il sistema **2.9** non ha equazioni linearmente indipendenti dato che ho imposto  $\det(2.9) = 0$ .

Se uso la prima equazione:

$$\eta_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2}$$

$$\eta_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2}$$

Se uso la seconda equazione:

$$\eta_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{k_2}{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}$$

$$\eta_2 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{k_2}{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}$$

Con  $X_i^{(k)}$ , dove:  $i$  è l'indice relativo al grado di libertà e  $(k)$  è l'indice relativo alla frequenza calcolata  $\rightarrow$  anche al modo di vibrare.

La soluzione dell'equazione di moto:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)$$

2. Modi di vibrare:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{cases} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) & 1^\circ \text{ modo} \\ \eta_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{cases}$$

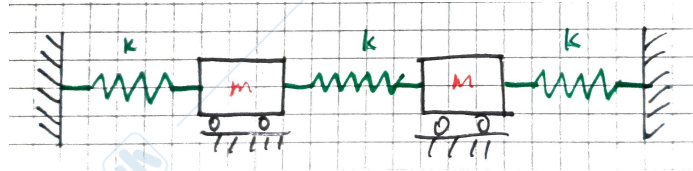
$$\mathbf{x}_2 = \begin{cases} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \eta_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) & 2^\circ \text{ modo} \end{cases}$$

Sono i **modi di vibrare del sistema**

$X_1^{(1)}$ ,  $X_1^{(2)}$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  sono determinati con le condizioni iniziali  $\begin{pmatrix} x_1(0), & \dot{x}_1(0) \\ x_2(0), & \dot{x}_2(0) \end{pmatrix}$

### 2.2.1 Esempio

$$\begin{matrix} m_1 = m_2 = m \\ k_1 = k_2 = k_3 = k \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases}$$



Soluzione:  $x_i(t) = x_i \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $i = 1, 2$ .

Determinante matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} \rightarrow m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0 \text{ equazione caratteristica} \quad (2.10)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$\eta_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m\omega_1^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_1^2 + 2k} = 1$$

$$\eta_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m\omega_2^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_2^2 + 2k} = -1$$

Primo modo:

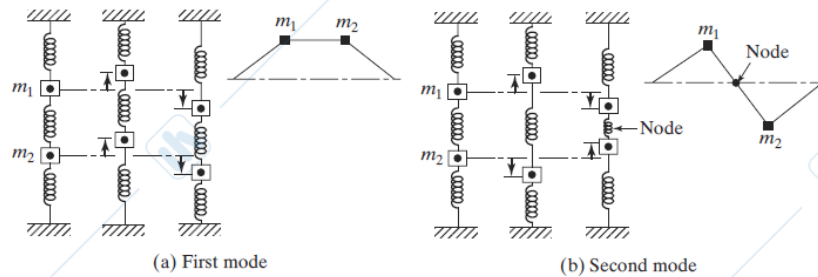
$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right) \\ X_2^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right) \end{pmatrix}$$

Secondo modo:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \varphi_2\right) \\ X_2^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \varphi_2\right) \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right) + X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \varphi_2\right)$$

$$x_2(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} + \varphi_1\right) - X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} + \varphi_2\right)$$



Primo modo: le masse si spostano in fase.  
Secondo modo: le masse si spostano in controfase.

## 2.2.2 Passaggio in coordinate cartesiane

Le equazioni di moto in coordinate fisiche  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  sono accoppiate. Per la teoria dei sistemi lineari posso introdurre una trasformazione di "coordinate" che rende il sistema disaccoppiato: le nuove coordinate si chiamano coordinate "modali" o "principali". Considero l'esempio precedente e definisco:

$$\begin{cases} q_1(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} + \varphi_1\right) \\ q_2(t) = X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} + \varphi_2\right) \end{cases}$$

Sono soluzioni di un sistema di equazioni differenziali.

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \frac{k}{m}q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \frac{3k}{m}q_2 = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Ho ottenuto  $m$  equazioni a 1 GdL invece di un sistema di  $m$  equazioni.

$$\begin{cases} x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) \\ x_2(t) = q_1(t) - q_2(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

Se uso la 2.12 nella 2.10 ottengo la 2.11. La trasformazione inversa è:

$$\begin{cases} q_1(t) = \frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)] \\ q_2(t) = \frac{1}{2}[x_1(t) - x_2(t)] \end{cases}$$