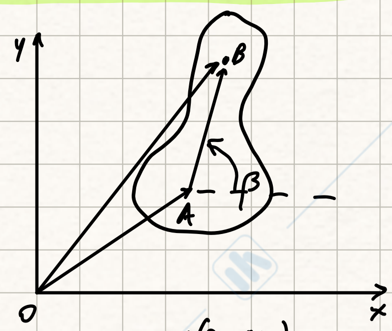
8) Ricavare il teorema di Rivals per le velocità e le accelerazioni di un corpo rigido e discutere il concetto di C.I.R.



Ricavo Rivals:

$$(B-O) = (A-O) + (B-A)$$

$$x_B + i y_B = x_A + i y_A + \overline{AB}\, e^{i\beta}$$

$\frac{d}{dt}$

$$\dot{x}_B + i \dot{y}_B = \dot{x}_A + i \dot{y}_A + \overline{AB}(i\dot{\beta})e^{i\beta} = \dot{\beta}\, \overline{AB}\, e^{i(\beta+\pi/2)} = \dot{\beta}\vec{k} \wedge AB e^{i\beta} = \vec{\omega} \wedge (B-A)$$

cioè

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge (B-A)$$

$\overline{AB}$ costante perché $\in$ a un C.R.

$\frac{d}{dt}$

$$\ddot{x}_B + i \ddot{y}_B = \ddot{x}_A + i \ddot{y}_A + \overline{AB}\, i \ddot{\beta} e^{i\beta} - \overline{AB}\, \dot{\beta}^2 e^{i\beta}$$

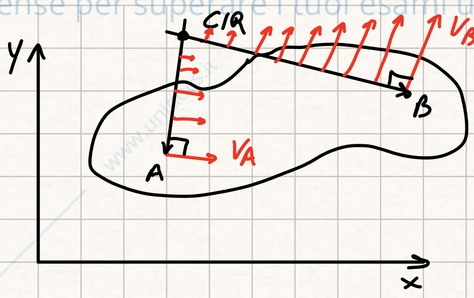
cioè

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B-A) - \dot{\beta}^2 (B-A) =$$

$$= \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B-A) + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (B-A)$$

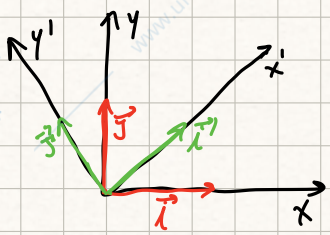
Discussione sul C.I.R.: un atto di moto può essere rototorio o traslatorio. $\forall$ atto di moto rotatorio $\exists$ un punto del C.R. (o collegato rigidamente a esso) t.c. la sua velocità sia nulla. Tale punto viene detto centro d'istantanea rotazione. Lo si può identificare graficamente tracciando le perpendicolari alle velocità di 2 punti non allineati del C.R.: la loro intersezione sarà il C.I.R.. Poiché lungo le 2 perpendicolari ogni punto del C.R. ha velocità perpendicolare alle stesse, il punto d'intersezione delle 2 ha velocità perpendicolare a due direzioni diverse (e $\in$ al piano) $\Rightarrow$ la velocità nel punto è nulla. Il C.I.R. è comodo per applicare il th di Rivals: $\vec{V}_P = \vec{\omega} \wedge (P - C.I.R.)$; $\vec{a}_P = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - C.I.R.) + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (P - C.I.R.)$

∀ punto P del C.R.



5) Ricavare il teorema dei moti relativi nel piano per le velocità e le accelerazioni per la cinematica del punto

Ricordo quanto affermato dalle formule di Poisson:

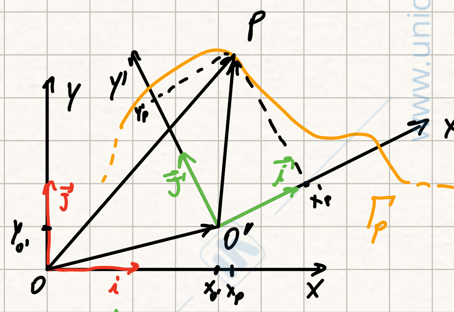


Considero i due sistemi di riferimento $S(xOy)$ fisso, e $S'(x'O'y')$ rotante con velocità angolare $\vec{\omega}$.

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{i\theta}\right) = i\dot{\theta}e^{i\theta} = \vec{\omega}\wedge\vec{i}'$$

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}\right) = i\dot{\theta}e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} = \vec{\omega}\wedge\vec{j}'$$

Per ricavare il teorema dei moti relativi considero un sistema di riferimento fisso $S(xOy)$ e uno mobile $S'(x'O'y')$.



cioè $(P-O) = (O'-O) + (P-O')$

$$(P-O) = x_{O'}\vec{i} + y_{O'}\vec{j} + x'_P\vec{i}' + y'_P\vec{j}'$$

$\frac{d}{dt}$:

$$\vec{V}_P = \dot{x}_{O'}\vec{i} + \dot{y}_{O'}\vec{j} + \dot{x}'_P\vec{i}' + \dot{y}'_P\vec{j}' + \underbrace{x'\vec{\omega}\wedge\vec{i}' + y'\vec{\omega}\wedge\vec{j}'}_{\rightarrow\ \vec{\omega}\wedge(x'\vec{i}' + y'\vec{j})}$$

$$\vec{V}_P = \underbrace{\vec{V}_{O'} + \vec{\omega}\wedge(P-O')}_{\text{velocità di trasc.}} + \vec{V}'_P$$

← velocità relativa

$\frac{d}{dt}$:

$$\vec{a}_P = \ddot{x}_{O'}\vec{i} + \ddot{y}_{O'}\vec{j} + \ddot{x}'_P\vec{i}' + \ddot{y}'_P\vec{j}' + \vec{\omega}\wedge(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}') + \dot{\vec{\omega}}\wedge(x'\vec{i}' + y'\vec{j}') +$$
$$+ \vec{\omega}\wedge(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}') + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge(x'\vec{i}' + y'\vec{j}')$$

$$\vec{a}_P = \underset{\text{relativa}}{\vec{a}'_P} + \underbrace{\vec{a}_{O'} + \vec{\dot{\omega}} \wedge (P-O') + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (P-O)}_{\text{trascinamento}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{V}'_P}_{\text{Coriolis}}$$

4) Applicazione del P.L.V nella dinamica dei sistemi

Il principio dei lavori virtuali è il più semplice e il più immediato dei metodi energetici per lo studio della dinamica di sistemi di C.R.. Per ricavarlo basta prendere l'equazione d'equilibrio dinamico delle forze (ottenuta col principio di D'ALAMBERT) e calcolare il lavoro associato a ogni forza e momento, sia di inerzia che non d'inerzia. Tale lavoro va calcolato lungo lo spostamento virtuale dei punti di applicazione cioè lungo lo spostamento del punto d'applicazione consentito dal vincolo (per le forze di inerzia considero il baricentro come punto di applicazione). In formule:

Equilibrio dinamico:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{in,i} = 0 \\ \sum_{j=1}^{m} (P_{i,j} - O) \wedge \vec{F}_{i,j} + \sum_{k=1}^{2} \vec{C}_{i,z} + (G_i - O) \wedge \vec{F}_{in,i} + \vec{C}_{in} = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \forall\ i = 1, \dots, m \text{ corpo rigido}$$

calcolo il lavoro di ogni forza

$$\delta L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{i,j} \cdot \delta \vec{P}_{i,j} + \sum_{i=1}^{m} \vec{F}_{in,i} \cdot \delta \vec{G}_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \vec{C}_{i,z} \cdot \delta \vec{\theta}_i + \sum_{i}^{m} \vec{C}_{in,i} \cdot \delta \vec{\theta}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{i,j} \cdot \delta \vec{P}_{i,j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \vec{C}_{i,z} \cdot \delta \vec{\theta}_i - \sum_{i=1}^{m} m \vec{a}_{G,i} \cdot \delta \vec{G}_i - \sum_{i=1}^{m} J \ddot{\theta} \vec{k} \cdot \delta \vec{\theta}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (F_{x,i,j} X_{i,j} + F_{y,i,j} Y_{i,j}) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{i,z}\, \delta\theta_i - \sum_{i=1}^{m} (m a_{x_{G,i}} x_{G,i} + m a_{y_{G,i}} y_{G,i}) - \sum_{i=1}^{m} J \ddot{\theta} \delta$$

Esprimo tutti gli spostamenti infinitesimi in funzione delle n_{GDL} coordinate libere nel seguente modo:

$$\delta \theta_i = \nabla \theta \cdot \delta \vec{q} = \sum_{s=1}^{n_{GDL}} \frac{\partial \theta}{\partial q_s} \cdot \delta q_s$$

$$\delta x_{G_i} = \nabla x_{G_i} \cdot \delta \vec{q} = \sum_{s=1}^{n_{GDL}} \frac{\partial x_{G_i}}{\partial q_s} \cdot \delta q_s$$

$$\delta y_{G_i} = \nabla y_{G_i} \cdot \delta \vec{q} = \sum_{s=1}^{n_{GDL}} \frac{\partial y_{G_i}}{\partial q_s} \cdot \delta q_s$$

Sostituendo tali valori nell'equazione precedente ottengo

$$\delta L = \sum_{s=1}^{n_{GDL}} \left(Q_s + Q_{in,s} \right) \delta q_s = 0$$

Dove le Q_s sono dette componenti lagrangiane e le $Q_{in,s}$ componenti lagrangiane d'inerzia. I vantaggi nell'applicare il P.L.V. per lo studio della dinamica di un sistema di C.R. consistono nel fatto che non serve tenere conto delle reazioni vincolari che non compiono mai lavoro.

6) Discutere l'effetto dello smorzamento in un sistema vibrante libero ad 1 GDL.

Lo smorzamento, che sia dovuto a forze d'attrito viscoso o a forze d'attrito radente, fa sì che qualunque moto libero, cioè privo di forzante, prima o poi termini. Guardando il moto sotto un aspetto energetico questo risultato è immediato: le forze d'attrito che causano lo smorzamento dissipano energia ad ogni ciclo finché il sistema non si arresta.

Nel caso di moto libero con smorzamento viscoso l'equazione di moto (ricavata come equilibrio dinamico delle forze) è del tipo: $m\ddot{x} + r\dot{x} + Kx = 0$ che è una eq. diff. di 2° grado lineare e om

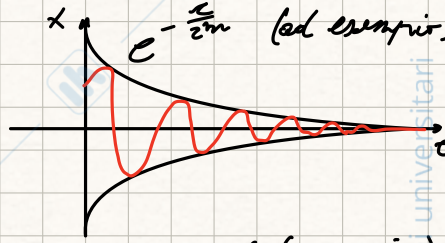
Il suo polinomio associato è dato da $\lambda^2 + \frac{r}{m}\lambda + \frac{K}{m} = 0$ con discriminante $\Delta = \left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}$ e soluzioni $\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$.

Per la teoria sulla risoluzione di eq. diff.

Detti $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$, $h = \frac{r}{2m\omega}$, $\omega_d = \omega\sqrt{1-h^2}$ le soluzioni $x_{(t)}$ saranno

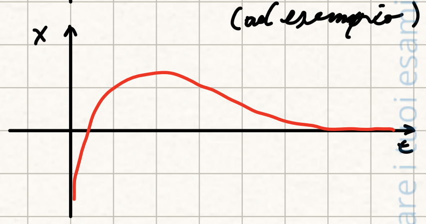
- se $h < 1$ ($\Rightarrow \Delta < 0$)

  $x_{(t)} = e^{-\frac{r}{2m}}\left(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right)$



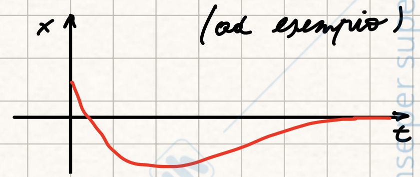
- se $h > 1$ ($\Rightarrow \Delta > 0$) $\Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_{1,2} \leq 0$

  $x_{(t)} = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$



- se $h = 1$ ($\Delta = 0$) $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{r}{2m}$

  $x_{(t)} = Ae^{-\frac{r}{2m}t} + Bte^{-\frac{r}{2m}t}$

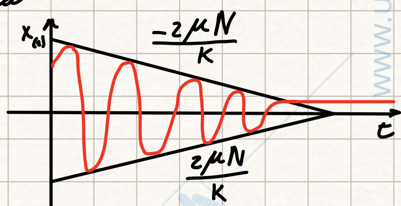


Si può notare che a prescindere dalle condizioni iniziali tutte le soluzioni tendono a zero all'infinito, cioè $\lim_{t\to\infty} = 0$, cioè il moto si arresta.

Nel caso di attrito radente l'equazione di moto che si ottiene è $m\ddot{x} + \mu N \,\mathrm{sign}(\dot{x}) + Kx = 0$ la quale non è una eq. differenziale lineare. Tuttavia è possibile linearizzarla a tratti:

$m\ddot{x} + Kx = -\mu N \longleftrightarrow 0 \leq t < \frac{T}{4}$ e $\frac{3}{4}T \leq t < T$

$m\ddot{x} + Kx = \mu N \longleftrightarrow \frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4}$



Date delle condizioni iniziali si può calcolare la soluzione $x_{(t)}$ utilizzando le condizioni a fine di un tratto come condizioni iniziali per il tratto successivo. Si osserva che a ogni semi periodo in cui è ancora attivo il moto la riduzione dell'ampiezza vale $\left|x_{(t)} - x_{(t+\frac{T}{2})}\right| = \frac{2\mu N}{K}$.

Il moto si arresterà quando la forza d'attrito sarà maggiore di quello elastico cioè quando la riduzione dell'ampiezza totale sarà minore dello spostamento statico dovuto alla forza d'attrito cioè appena: $X_0 - \eta \frac{2\mu N}{K} \leq \frac{\mu N}{K} \rightarrow \eta = \frac{X_0 - \frac{\mu N}{K}}{\frac{2\mu N}{K}}$

dove η è il numero di semi periodi.

1) Risposta nel tempo di un sistema in risonanza a 1 G.d.L. non smorzato e forzato da una forzante armonica.

L'equazione di moto del sistema è del tipo: $m\ddot{x} + k\dot{x} = F_0 \cos(\Omega t$

La sua soluzione è data dalla somma della soluzione dell'omogen e di una soluzione particolare cioè $x_{(t)} = x_{g(t)} + x_{p(t)}$.

La soluzione particolare è del tipo $x_{g(t)} = A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)$ $(h=0<1)$ con A e B costanti da determinare grazie a delle condizioni iniziali. La risposta particolare la si può calcolare per somiglianza:

$$x_{(t)} = X_0 e^{i\Omega t}$$ ← sottintendo l'operatore Re(...

$$\dot{X}(t) = i\Omega X_0 e^{i\Omega}$$

$$\ddot{X}_{(t)} = -\Omega^2 X_0 e^{i\Omega}$$

sostituendo ottengo $(-m\Omega^2 + K) X_0 \cancel{e^{i\Omega t}} = F_0 \cancel{e^{i\Omega t}}$

$$X_0 = \frac{F_0}{-m\Omega^2 + K} \in \mathbb{R} \qquad \varphi = 0$$

$$x_p = Re(X_0 e^{i\Omega t}) = \frac{F_0}{-m\Omega^2 + K} \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow X_{(t)} = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + X_0 \cos(\Omega t) =$$

$$= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \cos(\Omega t)$$

Considero le condizioni iniziali $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$ grazie alle quali ottengo $\begin{cases} A = x_0 - \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \\ B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \end{cases}$.

quindi $x_{(t)} = \left(x_0 - \frac{F_0}{K - m\Omega^2} \right) \cos(\omega t) + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) \sin(\omega t) + \frac{F_0}{K - m\Omega^2} \cos(\Omega t)$

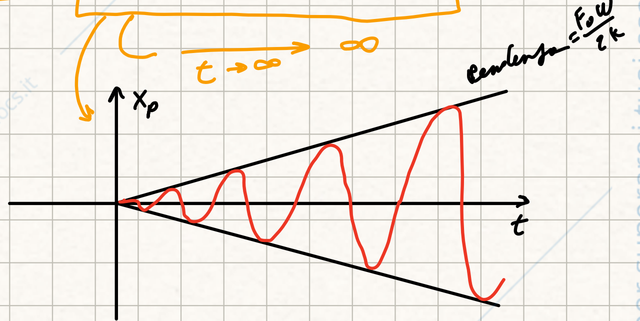
$$x_{(t)} = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{F_0}{K} \left(\frac{\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \right)$$

Il sistema è in risonanza se $\Omega = \omega$

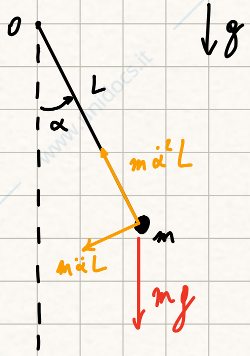
$$\lim_{\Omega \to \omega} \frac{\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \underset{\text{D.H.}}{=} \lim_{\Omega \to \omega} \frac{-t \sin(\Omega t)}{-\frac{2\Omega}{\omega^2}} = \frac{\omega t}{2} \sin(\omega t)$$

Per $\Omega \to \omega$ $\quad x_{(t)} = \underbrace{x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t)}_{\text{limitati}} + \underbrace{\frac{F_0}{K} \frac{\omega t}{2} \sin(\omega t)}_{t \to \infty \ \ \infty} =$

dato che x_g è limitata, a regime ($t \to +\infty$) il termine che risulta preponderante è la soluzione particolare.



9) Ricavare l'equazione di moto di un pendolo e discutere la risposta nel tempo di un sistema vibrante non smorzato eccitato in risonanza da una forzante armonica



Equilibrio dinamico del momento attorno a O:

$$\cancel{m} \ddot{\alpha} L^{\cancel{2}} + \cancel{m} g \sin\alpha \, \cancel{L} = 0$$

$$L \ddot{\alpha} + g \sin\alpha = 0$$

Per $\alpha \to 0$ $\sin\alpha \to \alpha$

$$L \ddot{\alpha} + g \alpha = 0$$ ← eq. differenziale lineare in α

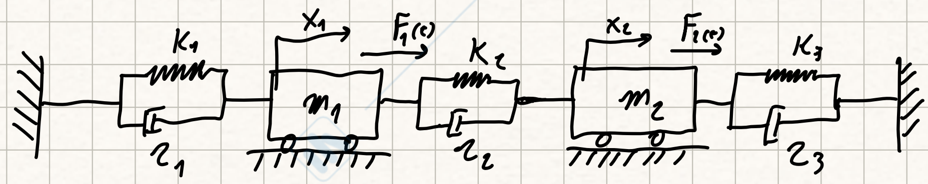
$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$\alpha_{(t)} = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ con A e B costanti da definire con delle condizioni iniziali

Per la seconda domanda guardare la risposta precedente.

10) Spiegare come si calcolano le frequenze proprie in un sistema vibrante a 2 G.D.L. in cui siano note le masse e le rigidezze del sistema.

Il sistema si può ridurre a un sistema del tipo



Andando a scrivere gli equilibri dinamici ottengo due equazioni differenziali lineari di secondo grado accoppiate:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (r_1+r_2)\dot{x}_1 - r_2\dot{x}_2 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + (r_2+r_3)\dot{x}_2 - r_2\dot{x}_1 + (k_2+k_3)x_2 - k_2x_1 = F_2(t) \end{cases}$$

Che, in analogia con l'eq. di moto ottenuta per sistemi vibranti a 1 GDL, può essere scritta in notazione matriciale come

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [r]\dot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = \vec{F}$$ dove le matrici sono così definite:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix};\ [R] = \begin{bmatrix} r_1+r_2 & -r_2 \\ -r_2 & r_2+r_3 \end{bmatrix};\ [K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}.$$

Ipotizzo che il sistema abbia una soluzione armonica

$$x_1(t) = X_1\cos(\omega t+\varphi) \quad \rightarrow \quad \ddot{x}_1(t) = -\omega^2X_1\cos(\omega t+\varphi)$$

$$x_2(t) = X_2\cos(\omega t+\varphi) \quad \rightarrow \quad \ddot{x}_2(t) = -\omega^2X_2\cos(\omega t+\varphi)$$

sostituisco, e poi raccolgo e "semplifico" $\cos(\omega t+\varphi)$ che non è ident. nullo

$$\begin{cases} (-m_1\omega^2 + (k_1+k_2))X_1 - k_2X_2 = 0 \\ -k_2X_1 + (-m_2\omega^2 + (k_2+k_3))X_3 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ammette soluzioni non banali $\Leftrightarrow$ il determinante della matrice dei coefficienti è nullo. Imporre che tale determinante sia nullo fa sì che le due equazioni non siano linearmente indipendenti. Questo implica che non è possibile trovare una soluzione esatta del sistema ma soltanto due rapporti

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

tra le ampiezze di vibrazione, che determineranno altrettanti modi di vibrare. Per ricavare i due rapporti η_1 e η_2 impongo: $\det\begin{bmatrix} -m_1\omega+(K_1+K_2) & -K_2 \\ -K_2 & -m_2\omega+(K_2+K_3)\end{bmatrix}=0$

$$m_1 m_2 \omega^4 - \left((K_1+K_2)m_2+(K_1+K_3)m_1\right)\omega^2+\left((K_1+K_2)(K_2+K_3)-K_2^2\right)=0$$

$$\omega_1^2,\ \omega_2^2=\frac{1}{2}\left(\frac{(K_1+K_2)m_2+(K_2+K_3)m_3}{\omega_1\omega_2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{(K_1+K_2)m_2+(K_2+K_3)m_1}{m_1m_2}\right)^2-4\left(\frac{(K_1+K_2)(K_2+K_3)-K_3^2}{m_1m_2}\right)}$$

che sono le frequenze proprie, al quadrato, dei due differenti modi di vibrare. Ovviamente $\omega_1=\sqrt{\omega_1^2}$; $\omega_2=\sqrt{\omega_2^2}$.
Se sostituisco ω_1 e ω_2 nel precedente sistema a equazioni non linearmente indipendenti ottengo

$$\eta_1=\frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}}=\frac{-m_1\omega_1^2+(K_1+K_2)}{K_2}=\frac{K_2}{-m_2\omega_1^2+(K_2+K_3)}$$

$$\eta_2=\frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}}=\frac{-m_1\omega_2^2+(K_1+K_2)}{K_2}=\frac{K_2}{-m_2\omega_2^2+(K_2+K_3)}$$

dove $X_n^{(K)}$ indica l'ampiezza della vibrazione relativa all'n-esimo grado di libertà e calcolato con K-esima pulsazione.
Si ottengono così i due modi di vibrare:

$$\vec{X}^{(1)}(t)=\begin{Bmatrix} X_1^{(1)}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) \\ \eta_1 X_1^{(1)}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)\end{Bmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)}(t)=\begin{Bmatrix} X_1^{(2)}\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \\ \eta_2 X_1^{(2)}\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\end{Bmatrix}$$

$X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, φ_1, φ_2 vengono fissati imponendo le condizioni iniziali