

Capitolo 1

"Homework 01" : Meccanica Computazionale

Esercizio 1. L'università degli Studi di Padova deve costruire una nuova aula collocata in un edificio indipendente di capienza 300 posti. L'edificio è interamente fuori terra. E' richiesta la progettazione della gradinata, che può essere considerata un elemento strutturale indipendente rispetto all'edificio (si scelga a piacere la tipologia costruttiva della struttura e lo schema strutturale; si assuma ragionevolmente, e giustificandole, tutte le grandezze utili non specificate nel testo).

A) E' richiesta la determinazione dello schema statico della gradinata e la costruzione di un modello ad elementi finiti in grado di rappresentarlo, giustificando ogni scelta. Il programma scelto per la discretizzazione della struttura agli elementi finiti è "Midas GEN". Si è scelta una struttura in calcestruzzo armato per realizzare la gradinata. Ciò ha implicato la scelta di soluzioni costruttive che hanno portato alla determinazione dello schema statico:

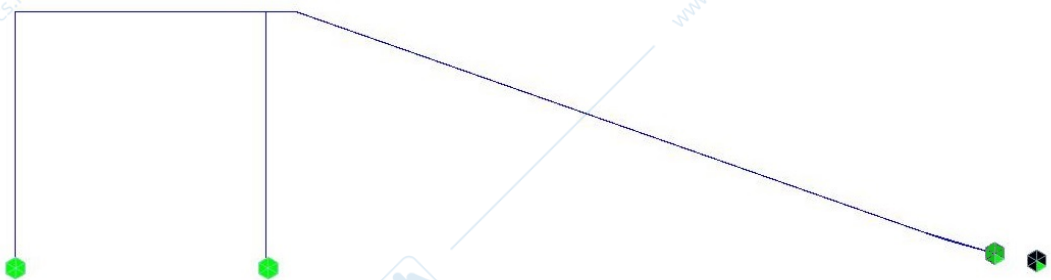


Figura 1.1: Schema statico struttura gradinate;

Alla base dei pilastri e della scalinata sono stati considerati degli incastri in quanto si presuppone che i giunti con le fondazioni vengano realizzati come in figura 1.2, mentre il collegamento tra portali e inizio della gradinata viene considerato come non in grado di sviluppare una cerniera interna e quindi un incastro rigido (vedi fig. 1.2). L'ultimo gradino invece, è stato considerato semplicemente appoggiato e comunque non collegato direttamente alla struttura non essendo importante ai fini della stabilità di essa.

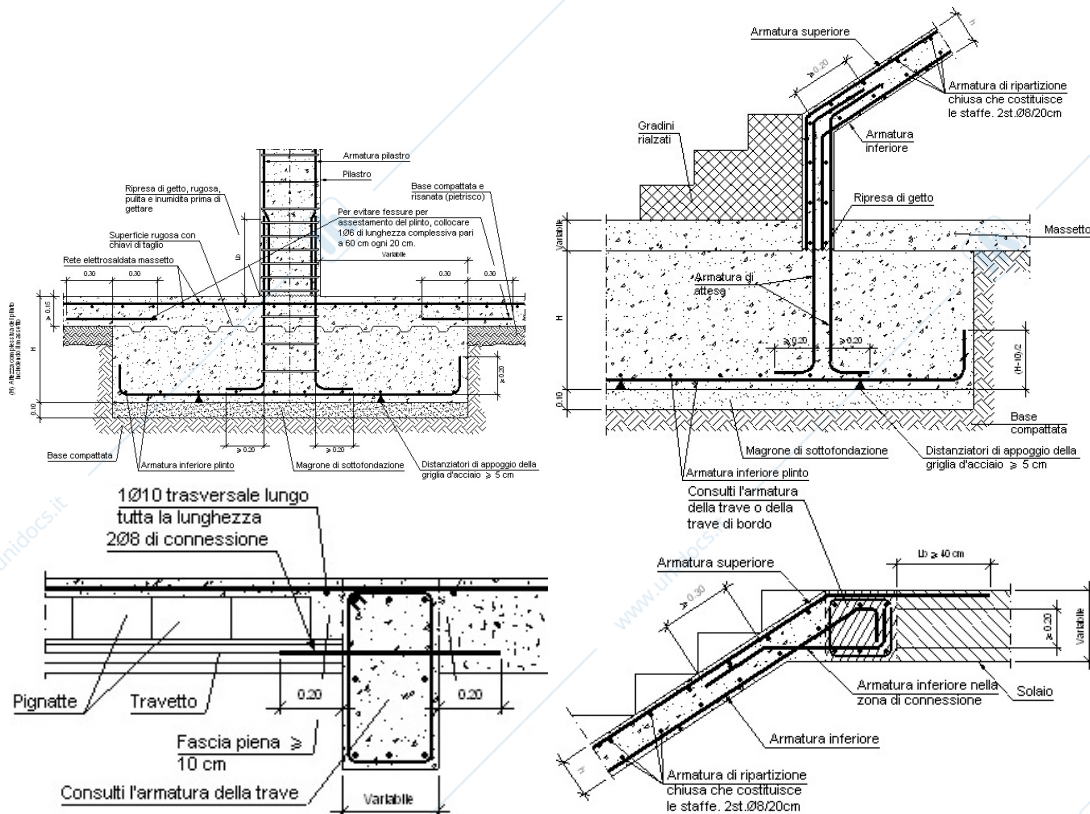


Figura 1.2: Dettagli della struttura rispettivamente dell'incastro del pilastro, l'incastro alla base della scala, l'attacco tra la trave di sommità e l'inizio delle scale e il dettaglio delle scale stesse;

Sulla base di questo schema statico e seguendo le indicazioni riportate nelle figure del testo si è poi eseguito un modello agli elementi finiti utilizzando elementi Beam in grado di rappresentare meglio la struttura intelaiata del portale e degli scalini.

Gli scalini sono stati collegati trasversalmente tra loro con l'ausilio di un ulteriore elemento Beam che simula il collegamento reale attraverso i ferri longitudinali alla direzione delle scale (vedi Fig.1.2 a destra). Il collegamento tra questi elementi è stato considerato come una cerniera interna (inserita nel programma come end release), non in grado di sviluppare momenti, in quanto i ferri dei gradoni e degli scalini si suppone non siano continui in tutta la lunghezza della struttura (parzializzazione sezione di calcestruzzo). Sono stati inseriti ferri trasversalmente anche a metà lunghezza dei gradoni in modo da non avere sollecitazioni di trazione eccessive nelle fibre tese delle gradinate (si è quindi generato un mutuo incastro rigido tra i due elementi Fig.1.3).

Successivamente si sono definite le proprietà degli elementi, in particolare tutti sono costituiti da calcestruzzo C 35/45 dal quale poi andranno dimensionati i ferri necessari ad assorbire le sollecitazioni inseriti nelle sezioni di cls.

Elemento	Dimensioni[m]
Pilastro	0.23 x 0.23
Trave	0.20 x 0.25
Scalini	0.40 x 0.34
Gradinata	0.80 x 0.48 (tw=tf=0.2)
Portante scale	0.33 x 0.38

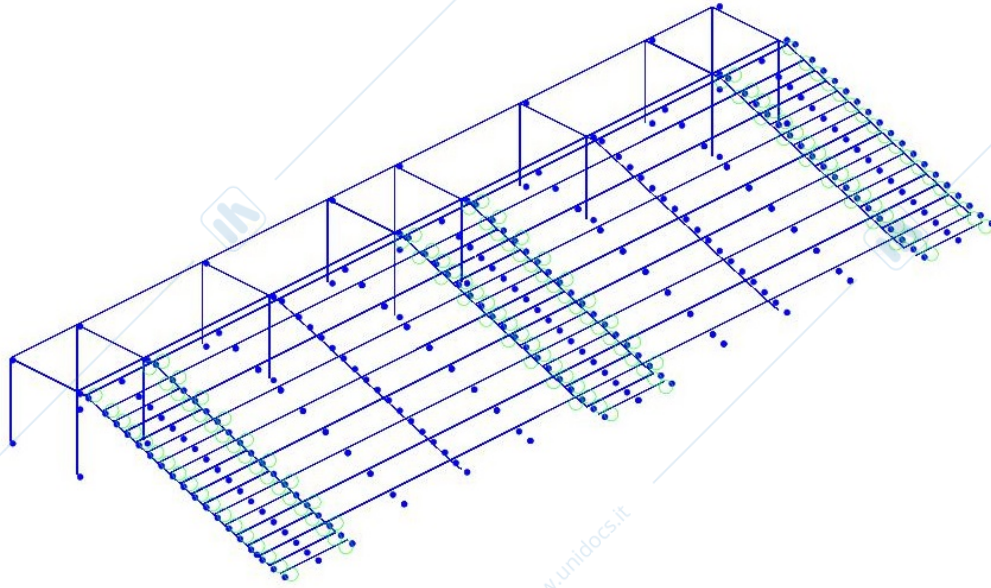


Figura 1.3: Modello FEM dell'intera struttura:portale+scalini+gradinate;

B) Definire due combinazioni agli SLE (più rappresentative) in grado di massimizzare le sollecitazioni nelle gradinate e nelle scale di accesso (giustificare i carichi assunti) Sono state considerate differenti combinazioni di carico in grado di massimizzare le sollecitazioni della struttura. Si è eseguita una verifica agli SLE (frequente) nella formulazione:

$$F_d = G_1 + G_2 + \psi_{11}Q_{k1} + \psi_{12}Q_{k2} + \dots$$

in cui G_1 rappresenta il carico permanente strutturale (Il peso proprio degli elementi in questo caso), G_2 il carico permanente non strutturale (banchi sulle gradinate e solaio in latero-cemento, rispettivamente: 0.5 KN/m e 3.50 KN/m per solai di spessore 250 mm), Q_{ki} i carichi variabili (carichi di esercizio da normativa per aule universitarie vedi fig.1.4) e ψ_{1i} corrisponde al fattore di riduzione per il carico considerato (per categoria di biblioteche, archivi,... il coefficiente è pari a 0,9 per categoria E).

Tab. 3.1.II - Valori dei sovraccarichi per le diverse categorie d'uso delle costruzioni

Cat.	Ambienti	q_k [kN/m ²]	Q_k [kN]	H_k [kN/m]
A	Ambienti ad uso residenziale			
	Aree per attività domestiche e residenziali; sono compresi in questa categoria i locali di abitazione e relativi servizi, gli alberghi (ad esclusione delle aree soggette ad affollamento), camere di degenza di ospedali	2,00	2,00	1,00
	Scale comuni, balconi, ballatoi	4,00	4,00	2,00
B	Uffici			
	Cat. B1 Uffici non aperti al pubblico	2,00	2,00	1,00
	Cat. B2 Uffici aperti al pubblico	3,00	2,00	1,00
	Scale comuni, balconi e ballatoi	4,00	4,00	2,00
	Ambienti suscettibili di affollamento			
	Cat. C1 Aree con tavoli, quali scuole, caffè, ristoranti, sale per banchetti, lettura e ricevimento	3,00	3,00	1,00
	Cat. C2 Aree con posti a sedere fissi, quali chiese, teatri, cinema, sale per conferenze e attesa, aule universitarie e aule magne	4,00	4,00	2,00

Figura 1.4: Estratto D.M. NTC 2018

La normativa prevedeva di poter trascurare i carichi G_2 che risultassero favorevoli per lo studio dell'elemento strutturale, di fatti nei primi casi il carico del solaio in latero-

cemento è stato trascurato per la massimizzazione del momento in campata degli scalini e dei gradoni.

Nella prima combinazione si voleva massimizzare il momento sulle gradinate e sulle scale e per farlo si sono considerati applicati i carichi strutturali (tutta la struttura), non strutturali (solo il peso dei banchi sulle gradinate) e i carichi di esercizio (applicati a mezze gradinate per massimizzarne il momento).

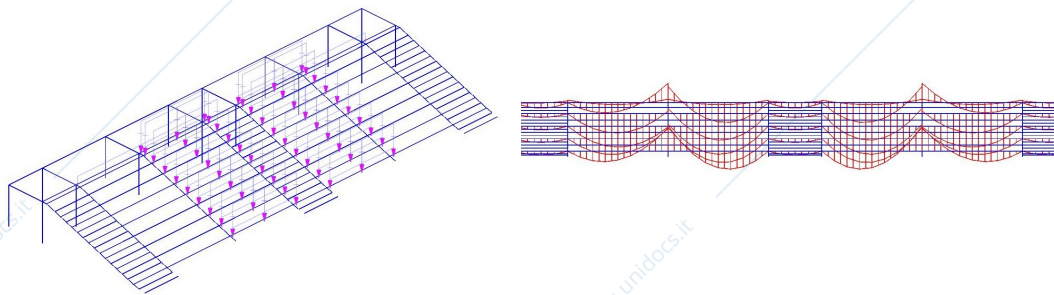


Figura 1.5: momento massimo nelle gradinate

Il momento massimo risultato è stato di 18.8 KNm per la mezzeria delle gradinate. Questa combinazione simula che gli studenti si seggano tutti in una parte delle gradinate, e questo genera il momento massimo in una campata (scaricando l'altra) come se fosse una trave in semplice appoggio con 2 campate.

Nella seconda combinazione si è voluta simulare la fase di uscita degli studenti dall'aula attraverso le scale ed il corridoio; per farlo si sono considerati applicati i carichi strutturali (tutta la struttura), non strutturali (peso del solaio) e i carichi di esercizio (applicati alle scale ed al corridoio sopraelevato).

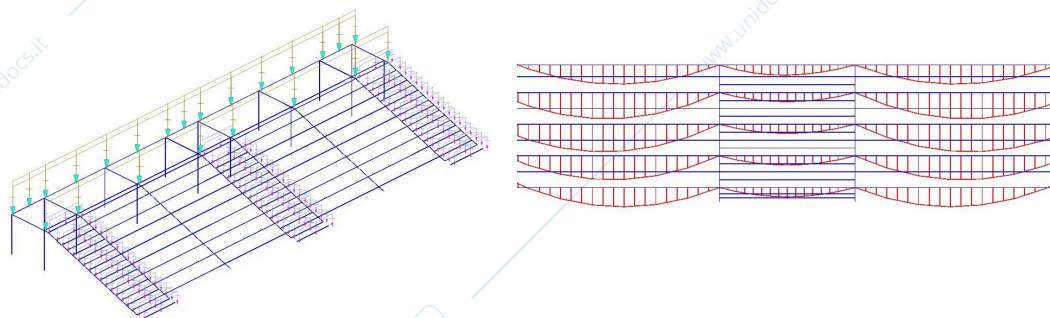


Figura 1.6: momento massimo nelle gradinate (dettaglio scala centrale)

Il momento massimo risultato sugli scalini è di 4.2 KNm per la mezzeria. Questa combinazione simula la fase di entrata/uscita degli studenti dall'aula. La combinazione di carico che massimizza il momento è solo una, in quanto i gradini sono studiabili come una trave in semplice appoggio con 1 campata caricabile.

Nella terza combinazione si voleva verificare il massimo momento raggiungibile trasversalmente dalle gradinate; per farlo si sono considerati applicati tutti i carichi (strut-

turali e non) agenti nella parte di struttura della gradinata, mentre sono stati tolti i carichi non strutturali e variabili che caricavano il corridoio (risultano essere favorevoli ai fini della sicurezza).

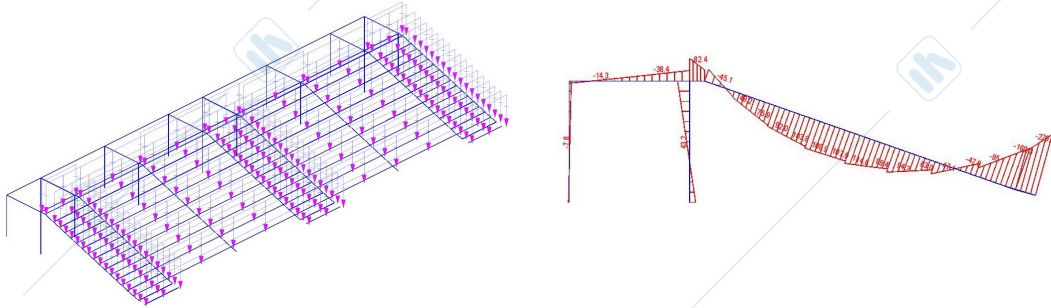


Figura 1.7: Combinazione di carico che massimizza il momento trasversale;

Il momento massimo risultato è di 110 KNm in mezzeria e di -230 KNm all'incastro della scala. Questa combinazione è quella in grado di massimizzare il momento in mezzeria e all'incastro; andrà quindi dimensionata la quantità di acciaio necessaria da aggiungere nella parte di sezione di calcestruzzo che si parzializza per resistere agli sforzi di trazione generati.

Nell'ultima combinazione invece si vuole massimizzare il taglio all'apice della gradinata, in corrispondenza dell'attacco con il portale, per questo vengono considerati tutti i carichi con componente verticale che possono dare contributo al taglio.

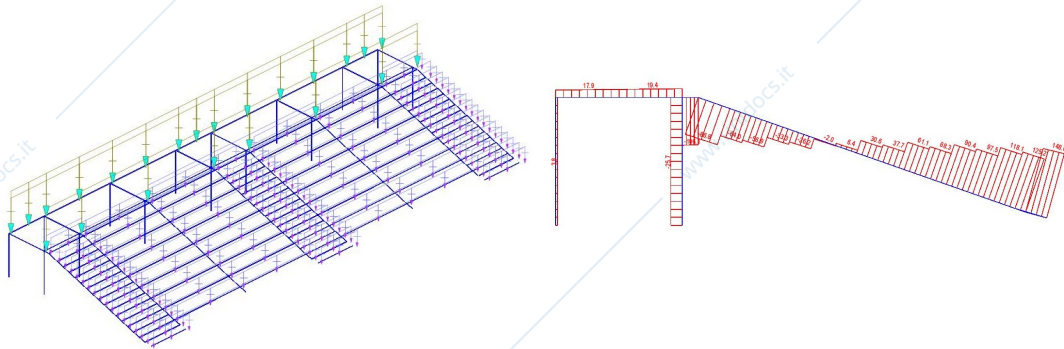


Figura 1.8: Combinazione di carico che massimizza lo sforzo tagliante

I valori massimi riscontrati sono 148 KN all'incastro della base della scala, 106 KN in corrispondenza del giunto tra pilastro e gradinate e di 25.7 KN nel pilastro più sollecitato.

C) La freccia massima di ogni componente strutturale non può superare $L/500$ con L luce della trave. Vengono poi calcolate le frecce massime per ogni elemento e confrontate con quelle massime ammissibili ($L/500$):

elemento	f_{max} [m]	$f_{i,max}$ [m]
travi (portale)	0.009	0.002
scalini	0.0048	0.001
gradinate	0.009	0.009
elemento trasversale	0.142	0.009

E' stato verificato che tutti gli elementi rispettano il requisito progettuale: $l < l_{max}$.

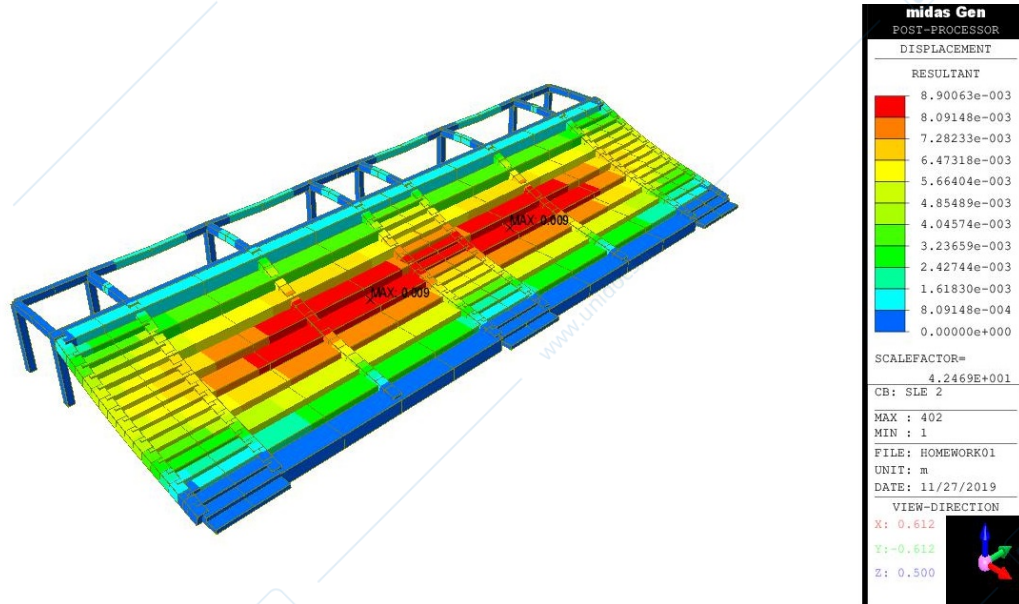


Figura 1.9: Deformata di tutta la struttura

Esercizio 2. Tramite il metodo agli elementi finiti (formulazione di un beam 2D alla Eulero Bernoulli) calcolare per la seguente struttura deformabile elasticamente le reazioni vincolari e la rotazione di estremità sapendo che l'appoggio subisce un cedimento δ .

Trattare il problema nel piano definendo i gradi di libertà e il numero di nodi in misura strettamente necessaria alla risoluzione del problema. La soluzione al problema sia calcolata parametricamente rispetto a tutte le grandezze utili.

Si parte sostituendo ai vincoli le relative forze e momenti: F_1, M_1, F_2

Per risolvere un elemento Beam 2D alla Eulero-Bernoulli si deve risolvere il sistema lineare: $K_{6 \times 6} \cdot \underline{a} = \underline{F}^{ext}$.

Dove $K_{6 \times 6}$ è la matrice di rigidità dell'elemento nel piano, \underline{a} è il vettore soluzione noto sui nodi e \underline{F}^{ext} è il vettore di forze e momenti applicati esternamente.

Sviluppando quindi il problema otteniamo:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ symm & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1 \\ M_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ricordando che, secondo il nostro schema, posso trascurare il contributo assiale dato da $u_1 e u_2$ e che $w_1 = \theta_1 = 0$; risolvendo il sistema in funzione del parametro di abbassamento δ , otteniamo le seguenti soluzioni:

$$\theta_2 = \frac{3\delta}{2l} \quad ; \quad F_1 = \frac{-3EI}{l^3}\delta \quad ; \quad M_1 = \frac{-3EI}{l^2}\delta \quad ; \quad F_2 = \frac{3EI}{l^2}\delta$$

Esercizio 3. Sviluppate numericamente l'integrale della funzione: $\int_{-1}^1 (x\sqrt{1+x^2} + 2) dx$ attraverso le formule di Newton-Cotes che restituiscono il metodo dei trapezi e il metodo Cavalieri-Simpson. Con la stessa discretizzazione si effettuò l'integrazione anche attraverso il metodo di Gauss-Legendre e 3 punti Gauss.

Newton-Cotes(n=1) La formula di Newton-Cotes considerando n=1 diventa la stessa espressione della formula dei trapezi:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

sostituendo quindi i valori ottengo:

$$\int_{-1}^1 (x\sqrt{1+x^2} + 2) dx \simeq \frac{1 - (-1)}{2} [f(-1) + f(1)] = 4.000$$

Newton-Cotes(n=2) Per n=2 ottengo invece la formula di Cavalieri-Simpson:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{6} [f(a) + f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

sostituendo quindi i valori ottengo:

$$\int_{-1}^1 (x\sqrt{1+x^2} + 2) dx \simeq \frac{1 - (-1)}{6} [f(-1) + f(0) + f(1)] = 4.000$$

Gauss-Legendre(3 punti) La formula di Gauss-Legendre è data dall'espressione generica:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} \cdot f(t_i)$$

dove $f(t_i)$ è la funzione calcolata nei punti di soluzione del polinomio interpolatore di Lagrange di grado pari al numero di punti Gauss d'appoggio, "n" equivale al numero di punti Gauss meno uno, mentre $A_i^{(n)}$ sono i pesi da dare a ciascun valore della funzione $f(t_i)$ calcolata per i punti di Gauss. I valori di questi pesi sono tabulati e valgono per il nostro caso:

	t_i	$A_i^{(n)}$
n=2	0.0	0.88889
	± 0.77460	0.55556

sostituendo e risolvendo nell'espressione sopra citata si ottiene:

$$\int_{-1}^1 (x\sqrt{1+x^2} + 2) dx \simeq \frac{1 - (-1)}{2} \sum_{i=0}^2 A_i^{(n)} \cdot f(t_i) = 4.000$$