

RELAZIONI COSTITUTIVE

- **Primo principio della termodinamica**

Il primo principio della termodinamica rappresenta una formulazione del principio di conservazione dell'energia e afferma che l'energia interna di un sistema termodinamico isolato è costante. Un universo termodinamico, costituito dal sistema e dal suo ambiente, è un sistema isolato. L'energia non si crea né si distrugge, ma si trasforma, passando da una forma a un'altra: l'energia può cioè essere trasferita attraverso scambi di calore e lavoro.

- **Secondo principio della termodinamica**

Serve un secondo principio atto a stabilire la direzionalità dei processi meccanici fisicamente ammissibili.

- **Energia libera di Helmholtz**

Descrive la porzione del lavoro delle tensioni interne che può essere restituita nella forma di lavoro meccanico. Essa è funzione dello stato deformativo attuale e di variabili interne, queste ultime atte a descrivere l'evoluzione microstrutturale del materiale in conseguenza alla storia deformativa.

- **Teoria delle relazioni costitutive**

Lo stato meccanico di un punto materiale dipende dall'evoluzione subita dalla sua microstruttura, quindi della storia deformativa che esso ha subito dall'istante t^0 all'istante t attuale. La storia deformativa può essere rappresentata per mezzo dello stato deformativo attuale $\underline{F}(\underline{x}, t)$ e delle variabili interne $\alpha^i(\underline{x}, t)$ che descrivono lo sviluppo dissipativo dei meccanismi di deformazione (alterazioni irreversibili della microstruttura o dissipazione energetica). Affinchè un processo meccanico, cui è sottoposto il punto materiale, soddisfi il secondo principio della termodinamica, è necessario formulare un modello costitutivo in modo tale che soddisfi sempre la disuguaglianza dissipativa di Clausius – Duhem:

$$D_{int}^{\dot{}} = \underline{P} : \underline{\dot{F}} - \dot{\psi} \geq 0$$

con ψ energia libera di Helmholtz. Essa stabilisce che la dissipazione interna deve essere sempre maggiore o uguale a zero e che la potenza delle tensioni interne deve essere maggiore o uguale al rateo di incremento dell'energia libera di Helmholtz. Questa espressione vale per qualunque coppia \underline{F} , α^i e qualunque rateo di dissipazione interna. La formulazione del modello costitutivo $\underline{P} = \underline{P}(\underline{F}, \alpha^i)$ richiede di definire la funzione dell'energia libera di Helmholtz $\underline{\psi} = \underline{\psi}(\underline{F}, \alpha^i)$, nonché una legge di evoluzione delle variabili interne α^i tale che $D_{int}^{\dot{}} \geq 0$.

Sapendo che $p_{int} = \underline{P} : \underline{\dot{F}} = 0.5 \underline{S} : \underline{\dot{C}}$ possiamo riscrivere la disuguaglianza come:

$$D_{int}^{\dot{}} = 0.5 \underline{S} : \underline{\dot{C}} - \dot{\psi} \geq 0$$

- **Principio di indifferenza materiale:**

Ci si chiede se il comportamento di un materiale possa dipendere dall'osservatore. La risposta a questo quesito è che lo stato meccanico di un punto materiale, esprimibile per mezzo della funzione di densità di energia libera di Helmholtz, deve essere la stessa per qualunque osservatore. Per dimostrare questa teoria, bisogna fare in modo che la funzione

non dipenda dall'osservatore: esprimendo l'energia di Helmholtz in funzione del tensore di deformazione destro di Cauchy-Green, il principio di indifferenza materiale risulta automaticamente soddisfatto, in quanto il tensore C risulta indipendente dall'osservatore

$$\underline{\psi} = \underline{\psi}(\underline{C}, \alpha^i)$$

Tra gli osservatori cambia solo il modo di vedere la rotazione rigida e C non dipende dalla rotazione rigida: si esclude quindi ogni influenza di componenti di rotazione rigida sullo stato meccanico del punto materiale.

- **Isotropia e anisotropia:**

Un punto materiale si dice:

- » Isotropo quando il suo stato meccanico è indipendente dalla specifica direzionalità dello stato imposto. La risposta meccanica quindi non cambia qualunque sia la direzione.
- » Anisotropo se, a parità di intensità dello stato deformativo imposto, la direzionalità dello stato deformativo influenza lo stato meccanico.

Si definisce gruppo di simmetria materiale l'insieme di rotazioni rigide capaci di non alterare il comportamento meccanico del punto materiale. Il gruppo di simmetria materiale contiene quindi tutti i tensori $Q \in \text{ORTH}^+$ tali che:

$$\begin{aligned} \psi(F) &= \psi(FQ) & \forall F \in \text{LIN}^+ \\ \psi(C) &= \psi(Q^T C Q) & \forall C \in \text{Psym} \end{aligned}$$

Un materiale si definisce trasversalmente isotropo se il suo comportamento è uguale in tutte le direzioni di un piano mentre è diverso in direzione ortogonale al piano di isotropia: è possibile quindi identificare una direzione preferenziale a_0 .

Nel caso di simmetria materiale trasversalmente isotropa il gruppo di simmetria materiale include tutti i tensori $Q \in \text{ORTH}^+$ tali che $Qa_0 = a_0$ la direzione preferenziale

- **Meccanismi di deformazione**

Per deformare un punto materiale è necessaria una tensione, la quale lavora sulla deformazione; la deformazione del materiale comporta un dispendio energetico, in forma di lavoro meccanico.

Nella configurazione indeformata, la microstruttura del punto materiale si trova in uno stato di minima energia. Per deformare il punto materiale è necessario modificarne la microstruttura attraverso uno o più meccanismi di deformazione; facendo questo la configurazione microstrutturale si porta in una condizione di energia superiore. L'energia necessaria ad attuare i meccanismi di deformazione viene fornita attraverso il lavoro delle tensioni.

I meccanismi di deformazione hanno diversi aspetti che vanno valutate:

- » *Reversibilità*

Un meccanismo di deformazione si dice reversibile qualora comporta un'alterazione reversibile nella microstruttura, altrimenti si dice irreversibile, se l'alterazione indotta è completamente o parzialmente irreversibile. In altri termini, all'atto dell'applicazione di uno stimolo, il meccanismo comporta un'alterazione della microstruttura: se all'atto della disapplicazione dello stimolo il meccanismo può essere recuperato, e se la configurazione microstrutturale ritorna al suo stato

originale, allora il meccanismo si dice reversibile, altrimenti si dice irreversibile o parzialmente irreversibile.

Da un punto di vista fenomenologico, deformazioni elastiche sono associate a meccanismi reversibili, mentre deformazioni plastiche (permanenti) o fenomeni di danno (con riduzione della rigidità) sono associati a meccanismi irreversibili. Un meccanismo di deformazione irreversibile è generalmente associato ad una dissipazione energetica.

Il comportamento elastico di un materiale è sempre associabile a meccanismi reversibili.

» **Rigidità**

È la capacità della microstruttura di opporsi allo sviluppo di un meccanismo di deformazione in presenza di uno stimolo esterno

» **Tempo dipendenza**

Un meccanismo di deformazione si dice istantaneo se non richiede tempo per svilupparsi, mentre si definisce tempo dipendente se richiede tempo per potersi sviluppare. Tempo e rapidità dipendono dal meccanismo stesso. Un meccanismo tempo-dipendente sta generalmente alla base del comportamento viscoelastico dei materiali; può svilupparsi sia in forma reversibile che irreversibile ed è generalmente associato ad un comportamento meccanico che prevede dissipazione energetica.

» **Dissipazione energetica**

L'utilizzo di energia volta a sviluppare il meccanismo di deformazione viene impiegata in due azioni:

1. Alterazione della configurazione microstrutturale: se l'alterazione è reversibile l'energia viene restituita nella fase di recuper, altrimenti viene dissipata.
2. Fenomeni di attrito interni: l'energia viene dissipata in calore a causa di fenomeni di microattrito coinvolti con il meccanismo di deformazione. Un meccanismo di deformazione comporta necessariamente dissipazione energetica quando il suo sviluppo comporta fenomeni di attrito interni al materiale.

• **Invarianti di deformazione**

Chiamiamo invarianti di deformazione:

- » Invariante lineare: $I_1 = \text{tr}(\underline{C}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
- » Invariante quadratico $I_2 = 0.5 [I_1^2 - \text{tr}(\underline{C}^2)] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2$
- » Invariante cubico: $I_3 = \det(\underline{C}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$

Gli invarianti hanno un significato fisico molto importante; ad essi possono essere associati stati di tensione particolarmente importanti ed immediatamente riconoscibili. Gli invarianti sono funzioni di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ed esprimono l'intensità dello stato deformativo.

Esistono anche l'invariante I_4 ed I_5 . L'invariante quarto esprime il quadrato della dilatazione subita dal materiale lungo la direzione preferenziale $I_4 = \lambda^2$

Se $I_4 \gg 1$ o I_4 tende a zero viene indotta una grande deformazione lungo la direzione principale, mentre se I_4 tende a 1 vi è poca sollecitazione lungo tale direzione.

L'invariante quinto non ha un significato fisico.

- **Materiale iperelastico**

In generale, un meccanismo di deformazione elastico implica reversibilità, istantaneità e assenza di fenomeni dissipativi.

In questa tipologia di materiale, l'elaborazione di un modello iperelastico richiede di specificare la dipendenza della densità di energia di deformazione dello stato deformativo istantaneo, nonché in considerazione di un opportuno set di parametri costitutivi.

$$W = W(\underline{u}, \underline{C})$$

\underline{u} rappresenta il vettore dei parametri costitutivi, ai quali deve essere possibile assegnare un significato fisico.

La formulazione della funzione densità di energia libera di deformazione ha luogo in considerazione di dati sperimentali inerenti la configurazione microstrutturale ed il comportamento meccanico ed in considerazione di principi fisico-matematici e restrizioni di tipo termodinamico.

Questo modello viene molto utilizzato per la rappresentazione meccanica di tessuti biologici o gomme.

- » Nel caso di un punto materiale iperelastico *isotropo* la relazione tra stato tensionale e stato deformativo può essere ricavata come

$$S = 2 \left[\frac{\delta W}{\delta I_1} \frac{\delta I_1}{\delta C} \right] + 2 \left[\frac{\delta W}{\delta I_2} \frac{\delta I_2}{\delta C} \right] + 2 \left[\frac{\delta W}{\delta I_3} \frac{\delta I_3}{\delta C} \right]$$

La funzione densità di energia di deformazione dipende dalla intensità dello stato deformativo ma non dalla sua direzionalità e può essere espressa come funzione delle dilatazioni principali e dei tre invarianti principali del tensore di deformazione destro di Cauchy Green.

$$W = W(\underline{u}, I_1, I_2, I_3) \quad \text{posso scrivere anche } I_3 = J$$

- » Nel caso di un punto materiale iperelastico *trasversalmente isotropo* la funzione densità di energia di deformazione dipende da intensità e direzionalità dello stato deformativo e può essere espressa come funzione dei tre invarianti principali del tensore di deformazione destro di Cauchy Green e di ulteriori due invarianti I_4 e I_5 . L'invariante quarto può essere correlato al quadrato della dilatazione subita dal punto materiale lungo la direzione preferenziale a_0 .

$$W = W(\underline{u}, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)$$

L'aggiunta di invarianti alla formulazione indica la dipendenza dell'energia accumulata dalla direzionalità.

Un materiale iperelastico può essere incomprimibile o comprimibile. Per poter capire quali siano le caratteristiche del materiale si procede con un'analisi della configurazione microstrutturale, per valutare la saturazione delle porosità mediante fasi liquide e la

possibilità di ossidazione di tali fasi liquide, e con un'analisi delle prove sperimentali eseguite in condizione di pura pressione, in cui si va a valutare la variazione volumetrica.

» *Comprimibile*

$$W(\underline{C}) = W^V(J) + \tilde{W}(\tilde{C})$$

Con $W^V(J)$ contributo volumetrico e $\tilde{W}(\tilde{C})$ contributo iso-volumetrico.

» *Incomprimibile*

$$W(\underline{C}) = -p(J - 1) + \tilde{W}(\tilde{C})$$

- **Modello costitutivo**

Formulare un modello costitutivo vuol dire formulare un'espressione per la funzione di densità di energia libera di Helmholtz in dipendenza dello stato deformativo attuale e della storia di deformazione, espressa per mezzo delle variabili interne (quindi serve una legge che descriva l'evoluzione delle variabili interne). La correlazione tra stato tensionale e stato deformativo è fornita dall'espressione $S(\underline{C}, \underline{\alpha}^i) = 2 \frac{\delta \psi}{\delta \underline{C}}$

- **Modello costitutivo elastico**

La funzione densità di energia di deformazione è potenziale dello stato deformativo. Un processo di carico-scarico è esente da fenomeni di tensioni e deformazioni residue.

- **Modello elastico lineare**

Nell'ipotesi di comportamento elastico lineare risulta possibile la definizione di un tensore costitutivo \mathbb{C} . Tale tensore è definito come

$$C_{ijkl} = \frac{\delta^2 W}{\delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{kl}} = \frac{\delta \sigma_{ij}}{\delta \epsilon_{kl}}$$

Nell'ipotesi di comportamento elastico lineare, il tensore costitutivo \mathbb{C} gode delle simmetrie minori e, di conseguenza $C_{ijkl} = C_{jikl}$ e $C_{ijkl} = C_{ijlk}$; le simmetrie riducono il numero di componenti date la loro uguaglianza.

Il tensore gode anche delle simmetrie maggiori, in conseguenza al teorema di Shwartz e, di conseguenza, $C_{ijkl} = C_{klij}$

Grazie alle due simmetrie, il tensore presenta al più 21 componenti indipendenti.

Il tensore provvede alla relazione $\sigma = \mathbb{C} : \epsilon$

» Nell'ipotesi di comportamento elastico lineare *isotropo* il tensore costitutivo \mathbb{C} presenta due componenti indipendenti ed assume la forma

$$\mathbb{C} = 2G\mathbb{I} + \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = 2G\epsilon + \lambda \text{tr}(\epsilon)\mathbf{1}$$

essendo \mathbb{I} il tensore identico di ordine 4 e $\mathbf{1}$ il tensore identico di ordine 2. Scriviamo il modulo di elasticità longitudinale o modulo di Young come:

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}$$

Scriviamo il modulo di contrazione laterale o modulo di Poisson come:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$$

Scriviamo il modulo di rigidità volumetrica.

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \frac{p}{3\alpha} = -\frac{p}{\Delta V/V_0}$$

Questi due moduli possono essere ricavati attraverso prove di trazione uniassiali.

Il modulo di Poisson può assumere valori compresi fra -1 e 0.5

Il modulo di Young deve essere sempre positivo.

Il modulo $K=E/[3(1-2\nu)]$ descrive la rigidità volumetrica.

Il modulo di Young e il modulo di Poisson descrivono completamente il comportamento meccanico del materiale.

- » Nell'ipotesi di comportamento elastico lineare *trasversalmente isotropo*, nel piano di isotropia il modulo di Young assume valore generalmente diverso rispetto al modulo di Young lungo la direzione preferenziale n ortogonale al piano di isotropia stesso. Il numero di costanti elastiche indipendenti è 5 ed il gruppo di simmetria materiale comprende le rotazioni rigide intorno ad un versore n . Indicando con e^1 la direzione preferenziale e con e^2, e^3 le direzioni definenti il piano di isotropia, per i moduli di Poisson vale:

$$\nu_{12} = \nu_{13} \text{ e } \nu_{21} = \nu_{31}$$

Il modulo di Young E_1 è solitamente diverso rispetto al modulo di Young E_3

- **Tessuto connettivo molle**

Il modello più frequentemente utilizzato per descrivere i tessuti molli è il modello iperelastico.

La densità di energia di deformazione è formata dalla sostanza di fondo e dall'anisotropia delle fibre. Si ipotizza la simmetria del materiale trasversalmente isotropa.

Nel caso di tessuto connettivo molle caratterizzato da fibre di collagene orientate secondo una specifica direzione si è soliti assumere $W(C) = W^M(I_1, I_2, J) + W^F(I_4, I_5)$ con:

$$I_1 = \text{tr}(C^{iso})$$

$$I_2 = 0.5 \left[I_1^2 - \text{tr}(C^{iso^2}) \right] - J^{-\frac{4}{3}} I_2$$

$$I_4 = a_0 \cdot C a_0 \text{ dove } a_0 \text{ è il versore parallelo alle fibre}$$

$$I_5 = a_0 \cdot C^2 a_0$$

C^{iso} è la componente iso-volumetrica del tensore di deformazione destro di Cauchy Green e vale $C^{iso} = J^{-2/3}C$. Da tenere a mente che $\det[C^{iso}] = 1$.

W^M e W^F rappresentano rispettivamente i parametri della matrice e i parametri delle fibre, in quanto le loro funzioni esplicano i contributi della matrice isotropa e della famiglia di fibre.

Nel caso di un tessuto connettivo molle incompressibile si è soliti assumere

$W(C) = -p(J - 1) + W^{iso}(C^{iso})$ dove p è la pressione idrostatica ed è determinata in base alle condizioni al contorno del problema meccanico.

- **Comportamento viscoelastico**

Quando un corpo è istantaneamente deformato e quindi lo stato deformativo è mantenuto costante, allora si osserva che lo stato tensionale va riducendo la propria intensità nel tempo: tale fenomeno è denominato "stress relaxation". Se il corpo è istantaneamente sottoposto ad uno stato tensionale che viene poi mantenuto costante, allora si osserva che lo stato deformativo evolve nel tempo incrementando la propria entità: tale fenomeno è denominato "creep". Se il corpo è sottoposto all'azione di una storia di carico ciclica, allora si osserva che nella fase di intensificazione del carico la relazione sforzo – deformazione assume andamento diverso rispetto alla fase di attenuazione: tale fenomeno è denominato "isteresi".

Durante una prova di stress-relaxation:

- » Il modulo di stress relaxation E^{sr} decresce nel tempo secondo legge esponenziale
- » Il modulo di stress relaxation E^{sr} assume inizialmente il valore istantaneo E^0
- » Lo stato deformativo viene mantenuto costante
- » Il modulo di stress relaxation E^{sr} decresce nel tempo fino a raggiungere il valore di equilibrio E^∞

Durante una prova di carico a velocità di deformazione costante:

- » Se la velocità di deformazione è adeguatamente piccola allora il modulo di Young assume un valore di equilibrio E^∞
- » Il modulo di Young apparente è influenzato dalla velocità di deformazione

Durante una prova di carico-scarico:

- » L'area di isteresi è funzione della velocità di deformazione
- » Il materiale esibisce fenomeni di isteresi

Durante una prova di creep:

- » Lo stato tensionale viene mantenuto costante
- » Il modulo di creep E^{creep} decresce fino a raggiungere il valore di equilibrio E

Il modello di Maxwell prevede un modulo di stress-relaxation E^{sr} decrescente nel tempo fino al valore nullo e un modulo di creep E^{creep} decrescente nel tempo fino al valore nullo. Nell'ipotesi di prova di carico-scarico, tale modello interpreta la dipendenza dell'area di isteresi dalla velocità di deformazione.

Nell'ipotesi di prova di carico a velocità di deformazione costante, prevede un modulo di Young apparente tendente a zero per velocità di deformazione tendente a zero.

Il modello di Kelvin-Voigt prevede una molla e un pistone collegati in parallelo fra loro.

Prevede modulo di creep E^{creep} tendente ad un valore di equilibrio per $t \rightarrow \infty$

Il modello di Zener prevede un sistema a tre elementi, costituito da una molla collegata in parallelo a un ramo a sua volta costituito da molla e pistone in serie prevede modulo di creep E^{creep} decrescente nel tempo secondo decadimento esponenziale e tendente a un valore istantaneo E^0 per $t \rightarrow 0$

Nell'ipotesi di stress-relaxation, tale modello interpreta correttamente il decadimento esponenziale del modulo di stress relaxation E^{sr}

Nell'ipotesi di carico a velocità di deformazione costante prevede andamento del modulo di Young apparente coerente coi risultati sperimentali.

Il modello di Zener generalizzato prevede:

- » variabili interne che descrivono le tensioni rilassate in conseguenza allo sviluppo dei processi viscosi
- » un modulo di equilibrio dato dal modulo elastico del ramo costituito dalla sola molla

Esso descrive un modello costitutivo in grado di soddisfare la disuguaglianza dissipativa di Clausius-Duhem e permette di definire la relazione tra tensione, deformazione e variabili interne, nonché la legge di evoluzione delle variabili interne.