MECCANICA DEI CORPI CONTINUI

- **Punto materiale**:
  Un punto materiale identifica una porzione infinitesima del corpo, che può avere conformazione geometrica arbitraria. In relazione ad una configurazione di tale corpo, il punto materiale viene identificato tramite la posizione $\underline{X}$. Essa rappresenta quindi la posizione occupata dal centroide del punto materiale entro la configurazione indeformata del corpo, e viene scritto come $\underline{X} = (X_1 , X_2 , X_3)$.
  In conseguenza ad una deformazione, il punto materiale (il centroide) si porta dalla posizione $\underline{X}$ alla posizione $\underline{x}$.
  Nel caso di punto materiale cubico, in conseguenza ad una deformazione, il punto materiale (più in generale, tutti i punti materiali del corpo) va incontro a fenomeni di spostamento, secondo la relazione $\underline{u}(\underline{X}) = \underline{x} - \underline{X} = \underline{e}(\underline{X}) - \underline{X}$. Il punto materiale costituisce un intornio infinitesimo del centroide $\underline{X}$, quindi l'andamento di $\underline{u}$ nell'intorno $\underline{X}$, ossia nel punto materiale, può essere descritto mediante uno sviluppo in serie di Taylor.

- **Meccanica dei solidi:**

  Tensione meccanica $\sigma = {}^{F}/_{A_0}$

  Deformazione $\varepsilon = {}^{\Delta L}/_{L_0}$

  Modulo di Young $E = {}^{\sigma}/_{\varepsilon}$

  Il modulo di Young esprime la rigidezza del materiale, che a sua volta rappresenta la capacità del materiale di opporsi alla deformazione ε in presenza di tensione σ.

  Rigidezza K = ${}^{F}/_{\Delta L} = E\ {}^{A_0}/_{L_0}$

  La rigidezza esprime la capacità del corpo di opporsi all'allungamento in presenza di carico F.

- **Campo degli spostamenti**:
  Tutti i punti del corpo vanno incontro a spostamento, descrivibile per mezzo del campo di spostamenti. Per capire quello che effettivamente succede, bisogna osservare come varia tale campo. In caso di campo uniforme si avrà traslazione rigida, mentre con un campo non uniforme rotazione rigida e deformazione effettiva. La variabilità locale del campo di spostamenti entro il punto materiale, espressa dalla formula $\nabla\underline{u} = \delta\underline{u}/\delta\underline{X}$, indica lo sviluppo di fenomeni di moto rigido e/o deformazione effettiva.
  Indichiamo $\underline{\nabla u(X)} = \delta\underline{u}(X)/\delta\underline{X}$ come il gradiente della funzione $\underline{u}$ valutato in $\underline{X}$.
  Per ogni $\underline{\nabla u(X)} \in$ LIN possiamo scrivere il gradiente come somma di

Componente simmetrica $\varepsilon(X) = 0.5\left(\nabla \underline{u(X)} + \nabla \underline{u(X)^T}\right)$

Componente antisimmetrica $\omega(X) = 0.5\left(\nabla \underline{u(X)} - \nabla \underline{u(X)^T}\right)$

Il tensore delle deformazioni ε presenta sulla diagonale i termini ε_{ii}, i quali indicano le dilatazioni (per $\varepsilon_{ii} > 0$) e le contrazioni (per $\varepsilon_{ii} < 0$) subite dal punto materiale lungo le direzioni del sistema di riferimento $\{e^i\}$ e sono adimensionali. I termini γ_{ij} presenti nelle altre posizioni rappresentano le variazioni subite dagli angoli inizialmente retti formati fra le facce del punto materiale nella configurazione indeformata (le distorsioni) e si esprimono in radianti. Il tensore è ε simmetrico, ed è rappresentato nel seguente modo:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0.5\gamma_{12} & 0.5\gamma_{13} \\ 0.5\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & 0.5\gamma_{23} \\ 0.5\gamma_{13} & 0.5\gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

- **Teoria della tensione Principio di azione e reazione**:
  Considerando un corpo soggetto a vincoli e sollecitazione meccanica (cambia configurazione da B a B^0) e considerando una superficie S passante per il punto materiale X e capace di suddividere in due il corpo, possiamo ammettere che la porzione di corpo B^A (contenente la zona di applicazione dei vincoli) esplica su B^B (contenente la zona di applicazione della sollecitazione) attraverso la superficie S,un sistema di azioni meccaniche uguali e contrarie al sistema di azioni meccaniche che B^B esplica su B^A attraverso la medesima superficie S. Il sistema di azioni meccaniche comprende azioni interne, la cui risultante dF è calcolata mediante la sommatoria di tutte le componenti dF^i. Chiamiamo densità di forza il vettore tensione:

  $t = \lim_{dA \to 0} dF/dA$ $\underline{t} = \underline{t}(\underline{X},\underline{S})$

  Per dA molto piccolo, la porzione d'area è approssimabile ad un piano; di conseguenza l'elemento d'area è completamente definito tramite la sua normale ➔ $\underline{t} = t(\underline{X},\underline{n})$.
  Come conseguenza del tetraedo di Cauchy, possiamo scrivere $\underline{t}(\underline{X},\underline{n}) = \sigma(\underline{X})n$ con $\sigma(\underline{X})$ tensore dello stress di Cauchy. Tale tensore descrive lo stato tensionale percepito entro il punto materiale $\underline{X}$ e permette di valutare la tensione trasmessa attraverso la superficie S. Il vettore dello stress t dipende linearmente da n: quindi qualsiasi superficie abbia, conoscendo n posso calcolare la densità di forza scambiata a S tramite il tensore σ.
  Chiamiamo:

  $\sigma = t\, n$ Tensione normale: è la componente della tensione perpendicolare ad S.

  $\tau = \sqrt{|t|^2 - \sigma^2}$ Tensione tangenziale: è la componente tangenziale ad S.

  Il materiale posto nell'intorno del punto materiale agisce sul punto materiale stesso mediante delle azioni meccaniche interne descritte per mezzo dei vettori di tensione t^1, t^2, t^3. Il vettore di tensione t^i può essere decomposto in una componente lungo la direzione e^i (perpendicolari alle facce del corpo cubico), ovvero le tensioni σ_{ii} e due componenti tangenziali τ_{ij} e τ_{ik} rispettivamente lungo le direzioni e^j ed e^k. Il tensore dello stress presenta sulle righe le componenti dei vettori di tensione agenti su elementi di superficie che rappresentano le normali e^i.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Le azioni meccaniche agenti sul punto materiale devono garantire l'equilibrio statico del punto materiale: l'equilibrio delle forze è automaticamente soddisfatto, mentre quello dei momenti viene soddisfatto per $\tau_{ab} = \tau_{ba}$. Così facendo, il tensore dello stress risulta essere simmetrico. Se le direzioni principali di tensione coincidono con le direzioni e^i, allora sussistono solo tensioni normali.

- **Cinematica dei corpi continui**

La funzione $\underline{e}$ definisce il moto (moto rigido + moto deformativo) del corpo continuo B^0 (in configurazione indeformata). Tale moto si definisce regolare se, in ogni istante $t \in I$ (con I intervallo temporale sede del moto del corpo) la funzione $\underline{e}$ fornisce una corrispondenza biunivoca tra le regioni B^0 e $B^t = \underline{e}(B^0,t)$ ovvero:

$\nabla t \in I$

$\nabla \underline{X},\underline{Y} \in B^0 : X \neq Y$

$\exists!\ \underline{x},\underline{y} \in B^t$ tale che

$\underline{x} = \underline{e}(\underline{X},t)$

$\underline{y} = \underline{e}(\underline{Y},t)$

In caso di moto regolare:

» Non ci sono fenomeni di rottura del corpo
» Non ci sono fenomeni di accumulo di materia
» Non ci sono fenomeni di collasso o compenetrazione del materiale

La funzione $\underline{e}$ è una funzione biunivoca, quindi invertibile. La funzione $\underline{e}^{-1}$ indica il punto materiale X che all'istante t occupa la posizione $\underline{x}$ dello spazio euclideo E, risalendo così alla configurazione indeformata.

Ci sono due approcci alla meccanica dei corpi continui:

» *Approccio Lagrangiano o Descrizione materiale*:
L'attenzione è focalizzata sul punto materiale $\underline{X}$. Per ogni istante t, la funzione ψ_L , che descrive come ψ (grandezza fisica atta a descrivere l'evoluzione di una proprietà del materiale, come densità o temperatura) evolve sul punto materiale al variare di t, restituisce il valore che la grandezza fisica ψ assume nel punto materiale $\underline{X}$ nell'istante t.

» *Approccio Euleriano o Descrizione spaziale*:
L'attenzione è focalizzata sulla posizione $\underline{x}$. Per ogni istante t, la funzione ψ_E , che descrive come ψ evolve nella posizione $\underline{x}$ sul punto materiale al variare di t, restituisce il valore che la grandezza fisica ψ assume sul punto materiale che occupa la posizione x nell'istante t.

Per passare da un approccio all'altro si ricorre a due operazioni:

» Operazione di pull-back o materializzazione (da eulero a lagrange):
Introduco la funzione moto $\psi_L(\underline{X},t) = \psi_E\ [\underline{x}(\underline{X},t),t]$

» Operazione di push-foreward o spazializzazione (da lagrange a eulero):
Introduco la funzione spia $\psi_E(\underline{x},t)] = \psi_L\ [\underline{X}(\underline{x},t),t]$

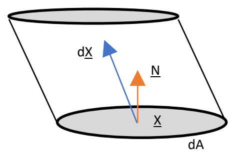
Ricordando che $\underline{x}(\underline{X},t)$ è la funzione moto e $\underline{X}(\underline{x},t)$ è la funzione spia.

Quindi descrivere una grandezza fisica ψ tramite descrizione materiale o spaziale vuol dire scrivere rispettivamente $\psi_L = \psi_L(\underline{X},t)$ e $\psi_E = \psi_E(\underline{x},t)$.

La derivata rispetto al tempo di ψ_L descrive come varia ψ nel punto materiale, mentre la derivata rispetto al tempo di ψ_E descrive il valore che ψ assume nella posizione x al variare del punto materiale che occupa la posizione x. Volendo valutare la variazione temporale della grandezza lagrangiana, basta calcolarne la derivata parziale nel tempo, mentre nel caso di grandezza euleriana si deve utilizzare la derivata materiale che aggiunge alla derivata parziale nel tempo un termine correttivo.

Al fine di valutare i processi di moto rigido e deformazione effettiva di un punto materiale, è opportuno osservare la variabilità della funzione e per mezzo del suo gradiente
$F_{ij} = \delta x_i / \delta X_j$
Il gradiente di deformazione opera su elementi lineari del materiale (dX) trasformandoli dalla configurazione indeformata a quella deformata: $dx = F(X,t)dX$
Se si vogliono osservare gli effetti volumetrici che questo gradiente ha, è opportuno ricordare che il volume di un corpo P è calcolato come Vol(P) = a(b $\wedge$ c) con a,b,c vettori sui quali è costruito il parallelepipedo. Sapendo che dV è il volume in configurazione indeformata mentre dv quello in configurazione deformata, sappiamo che
$\det F = Vol\,(B^t)/Vol\,(B^0) = \,dv/dV$
Dai dati ottenuti, possiamo riscrivere la trasformazione degli elementi lineari come:
$dx^i = FdX^i = dX^i Fe^i$
Chiamiamo determinante (o jacobiano) del gradiente di deformazione J(x,t) = det[F(x,t)].
Il gradiente di deformazione trasforma elementi di volume, quindi dv=JdV (J > 0).
Inoltre F $\in$ LIN$^+$, poichè det F > 0.
Questo ragionamento può essere applicato anche agli elementi di superficie, non solo ai volumi. Tenendo a mente che:

dV = NdA dX



Le notazioni cambiano una volta che si passa in configurazione deformata, dove dv = n da dx

Scriviamo la formula di Nanson, che mostra come il gradiente trasforma elementi di superficie: $n\,da = J\,F^{-T} NdA$
Applichiamo il teorema di decomposizione polare:
F = RU decomposizione polare destra, dove il punto materiale viene deformato secondo U e poi ruotato rigidamente secondo R.
F = VR decomposizione polare sinistra, dove il punto materiale ruotato rigidamente secondo R e poi deformato secondo U.
Il risultato delle due decomposizioni è il medesimo, in quanto F = RU = VR.
R ruota elementi lineari senza modificare la lunghezza (dx = $\|dX\|$), non altera il volume del punto materiale (dv = dV) e ruota elementi di superficie lasciando inalterata la loro estensione (da = dA).
Con R $\in$ ORTH$^+$ componente di F responsabile della rotazione rigida e U/V componente di F responsabile della deformazione effettiva. Scriviamo:
C = F^{T}F ➔ U^2 = C ➔ U = $\sqrt{F^T F}$
B = FF^T ➔ V^2 = B ➔ V = $\sqrt{FF^T}$
Con C tensore di deformazione destro di Cauchy-Green e B tensore di deformazione sinistro di Cauchy-Green.

C può essere espresso rispetto al sistema di riferimento $\{e^i\}$: esso presenta sulla diagonale i termini che descrivono le dilatazioni/contrazioni subite dal punto materiale lungo le direzioni $\{e^i\}$. Le componenti esterne alla diagonale forniscono informazioni in merito agli scorrimenti angolari subiti dal punto materiale (tramite gli angoli θ^{ij}).
Per calcolare la velocità di deformazione si va a derivare F:

$$\dot{F} = \frac{\delta}{\delta t}\frac{\delta x}{\delta X} = \frac{\delta v}{\delta X} = \frac{\delta v}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta X} = grad\ v\ F$$

con grad v = $\delta v/\delta x$.
Si ricava anche che $\dot{J} = J$ div v

- **Velocità ed accelerazione**
  Il campo euleriano della velocità v($\underline{x}$,t) descrive la velocità che caratterizza il punto materiale $\underline{X}$ che all'istante t occupa la posizione $\underline{x}$. Il campo lagrangiano della velocità si ottiene mediante operazione di pull-back.
  Il campo euleriano delle accelerazioni si ottiene, mediante operazione di derivazione materiale, come:

$$a(x,t) = \frac{\delta v(x,t)}{\delta t} + grad(v)v$$

- **Misura longitudinale di deformazione**

  dilatazione $\lambda = \frac{L}{L^0}$

  deformazione $\varepsilon = \frac{L-L^0}{L^0} = \lambda - 1$

- **Teorema del trasporto**:
  Permette di valutare dH/dt, ossia la derivata temporale dell'estensione di ψ su P^t, mantenendo fissa l'attenzione sul sottocorpo P^0 che all'istante t occupa la regione P^t.
  Avviene quindi un cambio nel dominio di integrazione. Per fare ciò, scrivo:
  $\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t)$
  $dv = J(\underline{X}, t)\, dV$
  $P^t \rightarrow P^0$
  Eseguendo i calcoli ottengo:

$$\frac{dH}{dt} = \int_{P^t}\left[\frac{\delta\psi}{\delta t} + \psi\ div(\underline{v})\right] dv$$

- **Conservazione della massa**:
  In un moto regolare, la massa di ogni corpo (e di ogni sottocorpo, in assenza di flussi di materia) si conserva lungo il moto, dato che non sono ammessi fenomeni di rottura o collasso di materia. Quindi:
  $dm = dM$
  $\rho^0 dV = \rho\, dv$
  Da cui $\rho^0 = J\rho$
  Ci sono due formulazioni di questo principio di conservazione:

» Euleriano:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \, div \, \underline{v} = 0$$

» Lagrangiano:

$$\rho^0(\underline{X}) = \rho \left[\underline{x}(\underline{X}, t), t\right] J \left(\underline{X}, t\right)$$

- **Bilancio delle forze**
  Parliamo di equilibrio delle forze e di equilibrio dei momenti: l'equilibrio delle forze è dato dalla relazione
  " ∑forze a distanza + ∑carichi superficiali + ∑reazioni vincolari = ∑azioni inerziali "
  e l'equilibrio dei momenti è dato dalle sommatorie dei relativi momenti.
  L'equilibrio tra le forze agenti sul corpo e le azioni inerziali deve valere sia per il corpo B^0 che per il sottocorpo P^0, e deve verificarsi per qualsiasi istante t.

- **Conservazione della quantità di moto**
  » Formulazione Euleriana mediante le equazioni di campo:

$$div(\underline{\sigma}) + \rho \underline{b} - \rho \underline{a} = 0$$

  » Formulazione Lagrangiana:

$$div(\underline{P}) + \rho^0 \underline{b} = \rho^0 \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)$$

- **Principio di conservazione del momento della quantità di moto**:
  Afferma, mediante equazioni di campo, l'equazione dei momenti.
  » Formulazione Euleriana:
  Afferma la simmetria del tensore dello stress di Cauchy $\sigma = \sigma^T$

  » Formulazione Lagrangiana:

$$PF^T = FP^T$$

- **Teorema delle forze vive**
  Il lavoro sviluppato dalla sollecitazione meccanica di un corpo, e che comporta un moto e, evolve in una variazione di energia cinetica del corpo B^0 (in relazione alla componente di moto rigido) e in lavoro delle tensioni interne, necessario ai fini della deformazione effettiva. Il teorema delle forze vive sancisce un principio di conservazione in termini energetici, a partire dai principi di conservazione di quantità di moto, momento della quantità di moto e della massa.
  Il teorema delle forze vive afferma che il tensore dello stress di Cauchy è associato in energia al gradiente di velocità.

- **Tensori dello stress di Piola – Kirchhoff**
  Nel caso di deformazioni finite , i tensori di sollecitazione di Piola – Kirchhoff esprimono la sollecitazione relativa alla configurazione indeformata. Ciò è in contrasto con il tensore dello stress di Cauchy che esprime lo stress relativo alla configurazione deformata. Per

deformazioni e rotazioni infinitesimali, i tensori di Cauchy e Piola – Kirchhoff sono identici. Considerando che il tensore delle sollecitazioni di Cauchy mette in relazione le sollecitazioni nella configurazione deformata, il gradiente di deformazione e i tensori di deformazione sono descritti mettendo in relazione il movimento con la configurazione indeformata.

Il *1 ° tensore delle sollecitazioni di Piola-Kirchhoff* definisce una famiglia di tensori che descrivono la configurazione del corpo nello stato corrente o di riferimento. Il 1 ° tensore delle sollecitazioni di Piola – Kirchhoff, mette in relazione le forze nella configurazione attuale ("spaziale") con le aree nella configurazione di riferimento ("materiale").
Il tensore di Cauchy è definito dal rapporto fra la forza applicata sul corpo e l'area/superficie della configurazione deformata; al contrario il primo tensore di stress di Piola-Kirchhoff è una quantità fittizia poiché mette in relazione la forza "reale" con l'area relativa alla configurazione indeformata del corpo. E' possibile scrivere delle relazioni di passaggio fra questi due tensori, impiegando il gradiente di deformazione per identificare la variazione fra le aree infinitesime delle due configurazioni. Si ha infatti che:

$$nds = JF^{-T}NdS$$
$$\sigma nds = PNdS$$

Il legame fra il tensore di Cauchy ed il primo di Piola-Kirchhoff risulta essere:

$$P = J\,\sigma\,F^{-T}$$
$$\sigma = J^{-1}PF^{T}$$

In generale *P* non è simmetrico.
Se il materiale ruota senza un cambiamento nello stato di sollecitazione (rotazione rigida), i componenti del primo tensore di sollecitazione varieranno con l'orientamento del materiale. Il 1 ° stress di Piola – Kirchhoff è energia coniugata al gradiente di deformazione.

Il *2 ° Tensore dello stress di Piola – Kirchhoff* mette in relazione le forze nella configurazione indeformata con le aree nella configurazione indeformata.

$$S = J\,F^{-1}\,\sigma\,F^{-T} = F^{-1}\,P$$

Il tensore S è simmetrico. Il secondo tensore di Piola-Kirchhoff può essere visto come il rapporto fra la forza fittizia, applicata al corpo deformato e la corrispondente area della configurazione indeformata del corpo.
Se il materiale ruota senza un cambiamento nello stato di sollecitazione (rotazione rigida), le componenti del secondo tensore rimangono costanti, indipendentemente dall'orientamento del materiale. Il 2 ° tensore di è l'energia coniugata al tensore di deformazione finita di Green–Lagrange, a $^1/_2\,\underline{\dot{C}}$