$\int_0^t \sum \vec{M}_{e_G} dt = \int_i^i dH_G = H_{G_f} - H_{G_i}$ ... quantità di moto ...

FENOMENO GIROSCOPICO

un solido giroscopico ha un asse di simmetria $\vec{\nu}$

$\boxed{I_\lambda = I_\mu}$ i momenti d'inerzia calcolati rispetto ad assi qualsiasi giacenti in un piano $\perp$ $\vec{\nu}$ e passanti per il baricentro del corpo, sono UGUALI fra loro

① ha una velocità angolare ω intorno all'asse di simmetria $\rightarrow$ rotazione propria detta **SPIN**

② ha una velocità angolare Ω intorno a un qualsiasi altro asse $\rightarrow$ moto di precessione

③ $\omega >> \Omega$

anche se $\omega = cost$ e $\Omega = cost$ $\Rightarrow$ nasce una coppia d'inerzia ossia un momento risultante delle azioni d'inerzia, $\vec{M}_{i_G}$, detta coppia giroscopica

- Tale coppia, opportunamente equilibrata con forze peso e reazioni elastiche, permette di misurare la velocità angolare Ω.
- Sistema usato negli indicatori di virata, giroscopi, piattaforme inerziali, stabilizzatori navali, convertitori di energia da moto ondoso.

In un solido giroscopico, ossia un corpo rigido che ruota intorno a un asse di simmetria anche se la terna non è fissata al corpo, i momenti di inerzia restano comunque invarianti nel tempo, essendo tutti uguali ($I_\lambda = I_\mu$). Tale terna deve essere sempre baricentrica con un asse diretto come l'asse di simmetria e gli altri possono non avere la stessa direzion di $\vec{\lambda}$ e $\vec{\mu}$

INDICATORE DI VIRATA

$G\vec{\lambda}\vec{\mu}\vec{\nu}$ terna centrale solidale con il solido

$G\vec{u}\vec{v}\vec{w}$ assi solidali alla forcella di supporto

siano: $\vec{\omega} = \omega \vec{\nu}$ velocità di spin

$\vec{\Omega} = \Omega \vec{k}$ velocità di precessione del telaio solidale con il veicolo ed è anche la velocità angolare di $Guvw$

$\boxed{\vec{\nu} \equiv \vec{w} \quad \vec{k} \equiv \vec{v}}$

SG: solido giroscopico

$$\vec{\omega}_{SG} = \omega \vec{\nu} + \Omega \vec{v} = \omega \vec{w} + \Omega \vec{v}$$

siano $\omega = cost$ $\quad \Omega = cost$

$$\vec{H}_G = I_\lambda \omega_\lambda \vec{\lambda} + I_\mu \omega_\mu \vec{\mu} + I_\nu \omega_\nu \vec{\nu} = I_u \omega_u \vec{u} + I_v \omega_v \vec{v} + I_w \omega_w \vec{w}$$

$$\left.\begin{aligned} I_\lambda = I_\mu = I_v = I_u \\ I_w = I_\nu \end{aligned}\right\} \text{ in quanto la ruota è un solido giroscopico}$$

$$\omega_u = 0 \quad \omega_v = \Omega \quad \omega_w = \omega$$

$$\Rightarrow \vec{H}_G = I_v \Omega \vec{v} + I_w \omega \vec{w}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{H}_G}{dt} = I_v \Omega \frac{d\vec{v}}{dt} + I_w \omega \frac{d\vec{w}}{dt}}$$

I_v e I_w sono costanti nel tempo

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}_{\text{terna } Guvw} \wedge \vec{v} = \Omega \vec{v} \wedge \vec{v} = 0$$

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{\omega}_{\text{terna } Guvw} \wedge \vec{v} = \Omega \vec{v} \wedge \vec{w} = \Omega \vec{u}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{H}_G}{dt} = I_w \omega \Omega \vec{u} \qquad \vec{M}'_G = -\frac{d\vec{H}_G}{dt} = -I_w \omega \Omega \vec{u}$$

In sintesi

- Conviene esprimere il momento della quantità di moto $\vec{H}_G$ rispetto a una terna mobile animata del solo moto di precessione, quindi non solidale al solido giroscopico. La velocità angolare di tale terna $Guvw$ è data da $\Omega \vec{v}$
- $Guvw$ è ancora una terna centrale d'inerzia per la specificità del solido giroscopico
- la coppia d'inerzia $\vec{M}'_G$ tende a far ruotare la forcella, ossia il supporto della ruota giroscopica di un angolo diretto come $-\vec{u}$, antiorario guardando da dietro
- equilibrando tale coppia d'inerzia con una massa eccentrica o con una reazione elastica si può determinare l'angolo di precessione Ω, nota la ω di spin

equilibrio forcella

$$\circlearrowleft G) \quad P l \operatorname{sen}\alpha - M'_G = 0 \quad \Rightarrow \Omega = \frac{P l \operatorname{sen}\alpha}{I_w \omega}$$

Caso $\alpha \neq 0$ e costante nel tempo

$\vec{\omega}_{disco} = \omega \vec{w} + \Omega \vec{k}$

$\vec{\omega}$ (gyro) $= \omega \vec{w} = cost$ **SPIN**

$\vec{\Omega} = \Omega \vec{k} = cost$ **PRECESSIONE**

$\vec{\omega}_{terna\ grad} = \vec{\omega}_{disco}$

$\alpha = cost$

$\vec{\omega}_{terna\ guvw} = \Omega \vec{k}$

In questo caso $\vec{v} \not\parallel \vec{k} \Rightarrow \vec{k} = \cos\alpha \vec{v} + \operatorname{sen}\alpha \vec{w}$

$$\vec{\omega}_{disco} = \omega \vec{w} + \Omega \cos\alpha \vec{v} + \Omega \operatorname{sen}\alpha \vec{w} = \Omega \cos\alpha \vec{v} + (\omega + \Omega \operatorname{sen}\alpha)\vec{w}$$

$$\vec{\omega}_{terna\ guvw} = \Omega \cos\alpha \vec{v} + \Omega \operatorname{sen}\alpha \vec{w}$$

$\boxed{\begin{aligned} \omega_u &= 0 \\ \omega_v &= \Omega \cos\alpha \\ \omega_w &= \omega + \Omega \operatorname{sen}\alpha \end{aligned}}$ componenti velocità ω del disco

$$\vec{H}_G = I_u \omega_u \vec{u} + I_v \omega_v \vec{v} + I_w \omega_w \vec{w} = I_v \Omega \cos\alpha \vec{v} + I_w(\omega + \Omega \operatorname{sen}\alpha)\vec{w}$$

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = I_v \Omega \cos\alpha \frac{d\vec{v}}{dt} + I_w(\omega + \Omega \operatorname{sen}\alpha)\frac{d\vec{w}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}_{terna} \wedge \vec{v} = \cancel{\Omega \cos\alpha \vec{v} \wedge \vec{v}} + \Omega \operatorname{sen}\alpha \vec{w} \wedge \vec{v} = -\Omega \operatorname{sen}\alpha \vec{u}$$

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{\omega}_{terna} \wedge \vec{w} = \Omega \cos\alpha \vec{v} \wedge \vec{w} + \cancel{\Omega \operatorname{sen}\alpha \vec{w} \wedge \vec{w}} = \Omega \cos\alpha \vec{u}$$

ricordando che per un disco sottile $I_v = \frac{I_w}{2}$ (il momento d'inerzia attorno un asse diametrale è uguale al momento di inerzia polare diviso due) e sostituendo nell'equazione generale, si ottiene

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = I_w \Omega \cos\alpha \left(\omega + \frac{\Omega \operatorname{sen}\alpha}{2}\right)\vec{u} \longrightarrow \boxed{\vec{M}'_G = -\frac{d\vec{H}_G}{dt}}$$

momento risultante delle azioni all'esterno

↓

COPPIA GIROSCOPICA

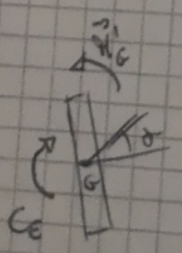
$\boxed{\text{se } \alpha = 0}$

$\vec{M}'_G = -I_w \omega \Omega \vec{u}$

Inoltre: $\vec{M}'_G \uparrow$ se $\begin{cases} I_w \text{ grande} \\ \omega \text{ grande} \end{cases}$

Ω si può ricavare dall'equilibrio della gabbia: ad esempio invece di interporre delle masse eccentriche, pongo delle molle di torsione

↳ $C_E = K_T \cdot \alpha$ coppia elastica generata dalle molle di torsione



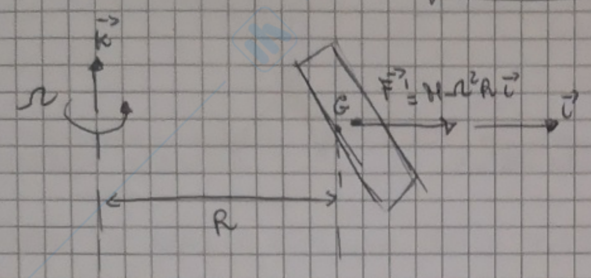
$$\Rightarrow K_T \cdot \alpha - I_w \Omega \cos\alpha \left(\omega + \frac{\Omega \operatorname{sen}\alpha}{2}\right) = 0$$

se $\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$ e M è la massa del solido giroscopico

$\vec{F}' = -M\vec{a}_G$ essendo $\vec{a}_G$ l'accelerazione del baricentro della ruota e assumendo R il raggio di virata;

se per ipotesi $\Omega = \text{cost}$, vale $\vec{a}_G = -\Omega^2 R \vec{i}$ componente centripeta

quindi $\vec{F}' = M\Omega^2 R \vec{i}$ forza risultante delle azioni d'inerzia



$\boxed{\text{EFFETTI GIROSCOPICI DEL MOTORE IN UN MONOMOTORE A TURBINA}}$

si determinano effetti giroscopici quando si effettuano virate a sx e dx, picchiate e cabrate

Hp: motore come cilindro omogeneo di centinaia di kg e con velocità angolare $\omega = 10.000 \div 20.000$ RPM

si introduce due terne centrali d'inerzia

$G\lambda\mu\nu$ (solidale al motore) e $Guvw$ (solidale al supporto del motore) con $\vec{w} \equiv \vec{\nu}$ attorno al quale si ha spin

In generale, dipende dal verso della ω_{SPIN} del motore:
- quando si vira → l'aereo tende a picchiare o a cabrare
- quando si fa una manovra a picchiare o a cabrare → l'aereo tende a virare

$\boxed{\text{VIRATA A SX}} \rightarrow \boxed{\omega \text{ MOTORE ANTIORARIA}}$

Si assuma inoltre che il moto di precessione avvenga attorno all'asse $\hat{k}$ avente stessa direzione di $\vec{v}$. Dunque

$\vec{\omega}_{motore} = \omega\vec{w} + \Omega\vec{v}$ per ipotesi $\omega, \Omega = \text{cost}$

$\vec{\omega}_{terna\ Guvw} = \Omega\vec{v}$

conviene esprimere $\vec{H}_G$ rispetto alla terna del supporto considerando la $\vec{\omega}$ del motore nelle sue componenti

$$\vec{H}_G = I_u\omega_u\vec{u} + I_v\omega_v\vec{v} + I_w\omega_w\vec{w} = I_v\Omega\vec{v} + I_w\omega\vec{w}$$

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = I_v\Omega\frac{d\vec{v}}{dt} + I_w\omega\frac{d\vec{w}}{dt}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}_{terna} \wedge \vec{v} = \Omega\vec{v} \wedge \vec{v} = 0 \\ \dfrac{d\vec{w}}{dt} = \vec{\omega}_{terna} \wedge \vec{w} = \Omega\vec{u} \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = I_w\omega\Omega\vec{u}$$

↪ $\vec{M}'_G = -I_w\omega\Omega\vec{u}$ => effetto cabrante <=> l'azione della coppia giroscopica $\vec{M}'_G$ si scarica sui cuscinetti del motore, e da questi al velivolo, tendendo a farlo ruotare e innalzare la prua, il muso